

Г67

МИНИСТЕРСТВО ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ СССР
ДНЕПРОПЕТРОВСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ИНСТИТУТ ИНЖЕНЕРОВ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА
имени М.И.КАЛИНИНА

На правах рукописи

Горбатов Виталий Сергеевич

УДК 624.04

ИССЛЕДОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ УПРУГИХ СИСТЕМ
С НЕСКОЛЬКИМИ ПОЛОЖЕНИЯМИ РАВНОВЕСИЯ
ПРИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ВОЗБУЖДЕНИЯХ

Специальность 01.02.03 - Строительная механика

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Днепропетровск 1987

НТБ
ДНУЖТ

Работе выполнена в Днепропетровском ордена Трудового
Красного знамени институте инженеров железнодорожного
транспорта имени М.И.Калинина

Научный руководитель - заслуженный деятель науки УССР,
действительный член АН УССР,
доктор технических наук, профессор
БОНДАРЬ Н.Г.

Официальные оппоненты - доктор технических наук, профессор
КАЗАКЕВИЧ М.И.,
кандидат технических наук, доцент
БАЕВ С.В.

Ведущая организация - Институт технической механики АН УССР

Защита состоится 29 сентября 1987г. в 15 ча-
сов на заседании Специализированного совета К 114.07.02
Днепропетровского института инженеров железнодорожного транс-
порта /320400, ГСП, Днепропетровск, Ю, ул.акад.В.А.Лазаря-
на, 2. ДИИТ/.

Поверніть книгу не пізніше зазначеного терміну.

Києво-Святошинська друк.

НТБ
ДНУЖТ

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Научно-технический прогресс в транспортном и промышленном строительстве связан с массовым применением инженерных сооружений, конструкций и устройств эффективного вида. Такие конструкции характеризуются малой материалоемкостью, большой гибкостью, малой жесткостью и существенными перемещениями. Практика проектирования транспортных и промышленных сооружений ставит вопрос учета работы конструкций при сложных динамических воздействиях произвольного периодического вида с широким спектром частот. Источниками динамических воздействий являются новая эксплуатируемая техника с реактивными двигателями, вибротехника, скоростные и тяжеловесные транспортные средства и т.п.

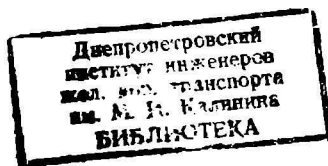
Интерес к исследованиям нелинейных колебательных процессов возрастает также в связи с введением санитарных нормативных документов, предписывающих жесткие ограничения уровней вибрации и шума, вредно влияющих на здоровье людей, снижающих качество продукции точных производств, загрязняющих окружающую среду.

Эти исследования примыкают к общим задачам теории нелинейных колебаний, имеющим приложения в различных областях физики и техники (конструирование приборов, машин, судов, летательных аппаратов и т.п.). Актуальной является также проблема, вызванная постановкой задачи прогнозирования и управления движением различных систем, работающих в условиях высоких скоростей и широкого внедрения автоматики.

Решение поставленных задач требует совершенствования методов строительного проектирования и дальнейшего разития разделов динамики сооружений, посвященных анализу движений нелинейных систем.

Таким образом, задачи совершенствования методов анализа движений сильно нелинейных систем, прогнозирования реализации режимов и параметров движений этих систем, создание алгоритмов расчетов, предназначенных для проектирования конструкций, являются актуальными и имеют важное теоретическое и практическое значение. Приближенные решения, дающие качественное представление о влиянии различных возбуждений на исследуемый режим, в ряде случаев позволяют получить основную информацию, необходимую для проектирования реальных объектов.

Целью работы является проведение приближенного анализа уравнений движений сильно нелинейных систем, совершенствование мето-



НТ
ДНУЖТ

дики прогнозирования реализации режимов движений и выбора параметров ряда проектируемых инженерных сооружений, конструкций и устройств, относящихся к системам с несколькими положениями равновесия и находящихся под действием произвольных периодических сил.

Научная новизна результатов исследований заключается в следующем:

построены математические модели движений ряда сооружений, конструкций и устройств, относящихся к симметричным и несимметричным упругим системам с несколькими положениями равновесия (системы с "толкающими связями" и системы с "эффектом проселкивания");

проведен анализ стационарных существенно нелинейных колебаний исследуемых диссипативных систем с одной степенью свободы под действием произвольных периодических возбуждений;

получены уравнения критических состояний для определения границ областей устойчивости движений, рассматриваемой в смысле физической реализации стационарных периодических движений;

построены графики реализации режимов движений на плоскости параметров возбуждений или коэффициентов функции упругих характеристик систем для прогнозирования режима движения (графики ряда упругих систем построены в безразмерных координатах);

разработан алгоритм вычисления координат амплитудно-частотных характеристик и границ областей устойчивости, а также осуществлена программная реализация алгоритма;

проведено сравнение результатов аналитических решений задач с результатами аналогового моделирования и расчетов на ЭВМ, а также с результатами известных исследований частных систем;

решены ряд новых практических задач, результаты которых внедрены в практику строительного проектирования.

Обоснованность и достоверность полученных результатов базируется на математической обоснованности примененного метода переменного масштаба, на хорошей согласованности с результатами аналогового моделирования, расчетов на ЭВМ и результатами, полученными в известных исследованиях отдельных частных систем.

Практическая ценность полученных результатов исследований заключается в возможности использования их при расчетах проектными и научно-исследовательскими организациями для оценки режимов, параметров и устойчивости колебаний гибких сооружений, конструкций и устройств, имеющих несколько положений равновесия.

НТБ
ДНУЖТ

Эффективность предлагаемого вычислительного алгоритма позволяет рекомендовать его включение в систему автоматизированного проектирования соответствующих объектов.

Полученные результаты могут оказаться полезными для повышения эффективности расчетных работ первого приближения и эффективности использования вычислительной техники при расчетах в последующих приближениях. При этом улучшаются показатели использования машинного времени, сокращается требуемый объем машинной памяти, появляется возможность использовать вычислительную технику для работы в диалоговом режиме.

На основе выполненных исследований в приложении к диссертационной работе приведены рекомендации для практического проведения анализа поперечных колебаний предварительно напряженных симметричных и несимметричных стержневых элементов металлоконструкций, а также бортовой качки плыкоутов, используемых при строительстве мостов и гидросооружений.

Полученные результаты исследований внедрены в практику проектирования институтом "УкрНИИпроектстальконструкция", специальным конструкторским бюро Главмостостроя (Киевское отделение), трестом "Мостострой №1", конструкторско-технологическим бюро "Мосоргстройматериалы". Материалы внедрены в учебный процесс Киевского института инженеров гражданской авиации.

Апробация работы. Результаты исследований докладывались и обсуждались на IV Всесоюзной конференции по проблемам устойчивости в строительной механике (г. Харьков, сентябрь 1972 г.), на научно-технических конференциях Днепропетровского института инженеров железнодорожного транспорта (1969-71 гг.) и Киевского института инженеров гражданской авиации (1972-87 гг.), на Республиканских конференциях "Техническая эксплуатация зданий и сооружений аэропортов" (г. Киев, ноябрь 1975 г.) и "Проектирование, строительство и эксплуатация аэропортов" (г. Киев, октябрь 1980 г. и ноябрь 1985 г.).

В полном объеме диссертационная работа доложена на заседании кафедры "Строительная механика" Днепропетровского института инженеров железнодорожного транспорта (сентябрь 1987 г.).

Публикации. По материалам диссертационной работы опубликовано 12 печатных работ.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, списка использованной литературы и приложения. Диссертация содержит 243 страницы машинописного текста

(из них основной текст 157 стр.), 19 таблиц, 131 рисунок, список использованных источников из 222 наименований.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обосновывается актуальность темы диссертации, указывается направление проводимых исследований и содержится краткая характеристика работы.

В первой главе анализируется состояние научно-технических исследований движений упругих систем с несколькими положениями равновесия при периодических возбуждениях, формулируется цель исследований, дается краткая характеристика существующих подходов к решению рассматриваемых задач, приводятся основные положения, выносимые на защиту, излагается краткое содержание диссертации и приводятся сведения о ее апробации.

Показано, что на современном этапе развития разделов теории колебаний, посвященных движениям нелинейных систем при периодических возбуждениях, располагает целым рядом эффективных методов, позволяющих успешно решать разнообразные технические задачи, посвященные в основном симметричным системам с упругой характеристикой жесткого вида, возбуждаемых моно- или бигармоническими силами. При этом в большинстве исследований изучается диапазон перемещений, удаленный от границ изменения положения равновесия.

Среди актуальных задач строительной механики значительно чаще встречаются возбуждения произвольного периодического вида, которые можно представить с помощью полигармонических функций. Исследования нелинейных систем с возбуждениями негармонического вида могут быть условно разделены на две группы в зависимости от порядка изучаемых гармоник и полученных результатов.

К первой группе относятся исследования, в которых с целью упрощения вида решений уравнений движений нелинейных систем с полигармоническим возбуждением проводится анализ на основе аппроксимации в виде основных гармоник и опускаются характерные для нелинейных систем сопутствующие гармоники. Это исследования И.Г.Малкина, А.И.Чекмарева, Г.Каудерера, В.П.Терских, Ю.М.Дроздова, Н.В.Григорьева, В.П.Рубаника, А.Тондла, Л.Пуста, М.В.Миронова, М.И.Казакевича и других ученых. В ряде случаев такой подход позволяет получать физически достоверную информацию о поведении системы в резонансных режимах основных тонов. Такой упро-

щенный анализ оказывается полезным на первых стадиях исследований процессов, протекающих в нелинейных системах, и в ряде случаев такая информация может быть успешно использована.

В работах второй группы исследованы стационарные колебания нелинейных систем с учетом влияния сопутствующих гармоник. Области ультра-, суб- и субультрагармонических резонансов описаны в работах Г.Гельмгольца, Дж.У.Стретта, Г.Дуффинга, Н.М.Крылова, Н.Н.Боголюбова, Э.А.Митропольского, Г.Каудерера, Т.Халси, А.П.Филиппова, Эфестиедеса, Н.Г.Бондаря, Б.И.Крюкова. Большое количество исследований выполнено для уравнений с моногармонической правой частью. К ним относятся работы В.М.Волосова, Б.И.Моргунова, Н.Н.Моисеева, Р.М.Розенберга, О.Блэкера, Броувелла, В.Каннигхэма, В.Шамплинской-Ступницкой, В.А.Плисса, М.Б.Закржевского и других авторов.

Отмечено, что исследование колебаний нелинейных систем с произвольным периодическим возбуждением строгими методами нелинейной динамики представляет значительную трудность из-за сложности периодических решений уравнений движения. Некоторые вопросы не рассматриваются или получают недостаточное развитие.

Решения уравнений движений значительно упрощаются, если в основу исследований нелинейных систем первого приближения лежит предварительная линеаризация системы одним из методов эквивалентной линеаризации Крылова-Боголюбова, методом Галкина, методом прямой линеаризации Я.Г.Пановко или методом переменного масштаба Н.Г.Бондаря.

Метод переменного масштаба в большей мере, чем другие методы, лишен ограничений применимости по степени нелинейности систем, поскольку заключается в изменении масштаба зависимой и независимой переменной. Математическое обоснование метода и уточнение фазовой функции для решения ряда задач, приведенное в работах Н.Г.Бондаря, С.В.Баева и М.И.Казакевича, позволяют решать специфически задачи нелинейной динамики ряда сложных инженерных сооружений. Так, могут быть проведены системные исследования существенно нелинейных симметричных и несимметричных систем с несколькими положениями равновесия при их произвольных периодических возбуждениях.

Изучение колебаний систем с несколькими положениями равновесия весьма важно для решения ряда прикладных задач строительного проектирования, а также конструирования объектов машино-

строения и приборостроения.

Так называемые системы "с эффектом прощелкивания" в первом приближении моделируют движение весьма пологих гибких элементов несущих конструкций зданий и сооружений. К ним относятся, стержни, пластины, цилиндрические и сферические оболочки, мембраны, стержневые системы типа фермы Мизеса, арки, предзарительно напругенные стержни, балки и стойки с нелинейно упругими опорами. В машиностроении к системам с прощелкиванием относится ряд виброуспокояющих элементов металлообрабатывающих станков, вибропогружателей, буровых станков, виброукладчиков бетонной смеси и других механизмов. В приборах, предназначенных для регистрации и измерений различных механических параметров, используют чувствительные элементы в виде хлопчатых мембран, элементов электромагнитных реле, пружинных контактных устройств, желобочных и биметаллических полос, обратных маятников со спиральными пружинами, тонкостенных гибких оболочек. К таким системам относятся электротехнические системы с триггерным эффектом.

Системы "с толкающими связями" представляют собой конструктивные элементы, расчетная схема которых имеет вид качающихся стержней, кубов, параллелепипедов, маятников. В приборостроении такие системы моделируют элементы электромеханических измерительных и регистрирующих приборов, а также устройства для возбуждения колебаний, применяемых при испытаниях конструкций. В станкостроении системы встречаются в рабочих и виброизолирующих элементах. В гидростроительстве и судостроении системы рассматриваются при решении задач устойчивости и бортовой качки судов, а также технологических плавающих средств.

На основе проведенного обзора отечественной и иностранной литературы установлена практическая необходимость в проведении исследований, посвященных вопросам оперативного анализа стационарных колебаний и прогнозирования реализации различных режимов движений ряда инженерных сооружений, конструкций и устройств, моделируемых с помощью нелинейных систем с несколькими положениями равновесия и находящихся под действием произвольных периодических возмущений. На основе результатов анализа первого приближения будет эффективен уточненный анализ поведения изучаемой системы с применением численных методов.

Задача решалась для стационарных колебаний нелинейных систем с одной степенью свободы, движения которых описываются диф-

дифференциальным уравнением второго порядка вида

$$\ddot{q}(t) + N(\dot{q}) + R(q) = Q(t),$$

где $N(\dot{q})$ - функция эквивалентного сопротивления, принимаемая при вязком трении в виде $N(\dot{q}) = 2n\dot{q}$ и при турбулентном сопротивлении - $N(\dot{q}) = n_1 \dot{q} |\dot{q}|$;

$R(q)$ - функция относительной упругой характеристики системы, задаваемая в виде степенных рядов;

$Q(t)$ - функция относительной возбуждающей силы, задаваемая в виде моно-, би- или полигармонической функции.

Для решения поставленной задачи с помощью метода переменного масштаба найдены частные решения дифференциальных уравнений движений, соответствующие стационарным колебаниям существенно нелинейных систем. Задачей исследований ограничено рассмотрение резонансных колебаний основных гармоник движений систем в пределах исследуемых положений равновесия.

Понятие критического состояния соответствует состоянию системы на границе между периодическим колебательным движением и движением качественно иного режима или между устойчивым периодическим колебательным режимом и неустойчивым движением. Устойчивость периодических движений рассматривается в смысле физической реализации колебаний системы в стационарном режиме.

Для оценки точности результатов все полученные в работе аналитические решения сопоставлены с решениями, полученными методами моделирования уравнений движений систем с помощью электронной нелинейной аналоговой установки типа МН-7 и путем численного интегрирования методом Рунге-Кутты на персональной ЭВМ типа "Роботрон-1715". Совпадение результатов решений позволили без строгой теоретической оценки точности расчетов принимать приближенные теоретические предпосылки.

Во второй главе для систем с несколькими положениями равновесия, находящихся под действием гармонического возбуждения получены решения дифференциальных уравнений движений в обобщенных координатах

$$\ddot{q}(t) + N(\dot{q}) + R(q) = Q \cos \omega t \quad /1/$$

Здесь упругая характеристика системы $R(q)$ задана в виде однородной функции, выраженной рядом Маклорена.

Для упрощения исследования уравнения /1/ рассмотрены отдель-

но стационарные колебания системы с умеренно большими амплитудами в области, примыкающей к положению устойчивого равновесия, и колебания с существенно большими амплитудами в области, непосредственно примыкающей к границе изменения режима движения.

Решение уравнения движения упругих систем без учета сил сопротивления идем с помощью метода перекоженного масштаба. Для этого вводим фазовую и амплитудную функции

$$\varepsilon = \varphi(t), \quad z(\varepsilon) = f(q) = \sqrt{2 \int_0^q k(u) du},$$

позволяющие представить исходное уравнение /1/ в линейном виде

$$z''(\varepsilon) + z(\varepsilon) = \frac{Q}{\varphi(t)} \cos \omega t \quad /2/$$

Фазовую функцию $\varphi(t)$ при описании колебаний с умеренно большими амплитудами и соответствующим им модулем $k \ll 1$ найдем из полученного ранее Н.Г.Вондарем выражения

$$\psi t = \Phi(\varphi, k) = \frac{2}{\pi} K(k) \varphi - \sin \varphi \cos \varphi \left[d_0 + \frac{2}{3} d_1 (\sin \varphi)^2 + \frac{2}{5} d_2 (\sin \varphi)^4 + \dots \right], \quad /3/$$

где $\Phi(\varphi, k)$ - эллиптический интеграл I-го рода;

$K(k)$ - полный эллиптический интеграл I-го рода,

$$a_0 = \frac{2}{\pi} K(k) - 1 = 2B, \quad a_n = a_{n-1} - \left[\frac{(2n-1)!!}{2^n n!} \right]^2 k^{2n}$$

Пользуясь приближением в виде двух первых членов ряда /3/, то-есть

$$\varphi(t) = \varepsilon = \theta t + B \sin [\gamma \varphi(t)]$$

получаем частное решение исходного уравнения /1/ в виде

$$f(q) = Q \theta \left\{ \frac{\cos \omega t}{\theta^2 - \omega^2} - \beta \frac{\gamma}{2} \left[\frac{\cos(\omega - \gamma \theta) t}{\theta^2 - (\omega - \gamma \theta)^2} + \frac{\cos(\omega + \gamma \theta) t}{\theta^2 - (\omega + \gamma \theta)^2} \right] \right\}$$

При нахождении приближенного решения в области основного резонанса принята гипотеза И.Г.Мелкина о незначительности влияния сопутствующих гармоник на резонансные колебания системы с основной частотой. В полученном решении сопутствующими гармониками являются комбинационные гармоники ультра- и субгармонического порядков $(\omega \pm \gamma \theta)$

Амплитудно-частотное уравнение принимает вид

$$f(q) = \frac{\theta(q)}{\theta^2(q) - \omega^2} Q$$

Для нахождения границ областей неустойчивых движений принят известный (из работ Ф.Джона, Дж.Стокера, Т.Хаяси, В.Шамплин-ской-Ступницкой и других авторов) критерий, согласно которому граница устойчивых решений, отсечавших сдвигу фаз на 180° , проходит через координаты, в которых касательные к ветвям амплитудно-частотных характеристик становятся вертикальными, то-есть в местах перегиба ветвей. Определение сочетаний параметров возбуждений (Q, ω) , соответствующих скачкообразным изменениям амплитуд колебаний, ведется путем решения системы двух уравнений, одно из которых является амплитудно-частотное уравнение, другое — производной уравнения по Q , записанной с условием $\omega'(Q) = 0$. Система уравнений критических состояний имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \omega(Q) &= \theta(Q) \left[1 + \frac{f'(Q) \theta'(Q)}{f(Q) \theta(Q)} \right] \\ Q(Q) &= -2 \frac{f'(Q) \theta'(Q)}{f(Q)} \left[1 + \frac{f'(Q) \theta'(Q)}{f(Q) \theta(Q)} \right] \end{aligned} \right\} \quad /4/$$

На графиках амплитудно-частотных характеристик область неустойчивых движений ограничена с одной стороны кривой, построенной с помощью первого уравнения системы /4/, а с другой — кривой, совпадающей с кривой собственных частот системы.

Для полноты анализа движения систем графики амплитудно-частотных характеристик дополнены в работе графиками реализации режимов движений на плоскости параметров возбуждений (Q, ω) . Границы областей параметров возбуждений, реализующих различные режимы движений строятся с помощью системы уравнений /4/.

Для стационарных колебаний с существенно большими амплитудами в системах с толкающими связями и с эффектом прощелкивания наблюдается также явление перехода к качественно иным режимам движений или изменение положения равновесия. Такое явление наблюдается при перемещениях системы, превышающих критические значения амплитуд. При этом восстанавливающая сила системы превращается в толкающую. Для определения величин критических амплитуд введен физический критерий, согласно которому вынужденные колебания около положения устойчивого равновесия становятся неустойчивыми при перемещениях, определяемых из условий

$$R(q_\alpha) = 0, \quad R'(q_\alpha) < 0 \quad /5/$$

НТБ
ДНУЖТ

Для получения решения дифференциального уравнения /1/, соответствующего колебаниям с существенно большими амплитудами ($a \approx a_c$, $k \approx 1$), принято уточненное выражение для определения фазовой функции

$$\psi t = O(\varphi, k) = \frac{2}{\pi} K'(k) \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) - \frac{2}{\cos \varphi} \left(d_0' - \frac{2}{3} d_1' \operatorname{tg}^2 \varphi + \frac{2}{5} d_2' \operatorname{tg}^4 \varphi - \dots \right), \quad /6/$$

где $d_0' = \frac{2}{\pi} K'(k) - 1$, $d_n' = d_{n-1}' - \left[\frac{(2n-1)!!}{2^n n!} \right] (k')^{2n}$, $K'(k) = K(k)$, $k' = \sqrt{1-k^2}$

На границе зоны периодических движений, когда $k \rightarrow 1$, $K(k) \rightarrow \infty$, $\theta(a) \rightarrow 0$, $a_0 \rightarrow 0$, $a_n \rightarrow 0$, выражение /6/ упрощается и принимает вид

$$\psi(t) = \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right)$$

Это позволяет представить заменяющее уравнение в виде

$$Z''(\varepsilon) + Z(\varepsilon) = \frac{Q}{\psi} \frac{\cos \cot \varepsilon}{\cos \varepsilon} = \frac{Q}{\psi} \sin \delta(\varepsilon) \quad /7/$$

Частное решение уравнения /7/ ищется в виде

$$Z(\varepsilon) = C \cos(\delta + \lambda)$$

где C, λ - амплитуда и фаза, удовлетворяющие условиям

$$\left. \begin{aligned} \frac{dC}{d\varepsilon} &= -\frac{Q \cos \lambda}{\psi(1-V)} \\ \frac{d\lambda}{d\varepsilon} &= V - 1 + \frac{Q \cos \lambda}{C \psi(1-V)} \end{aligned} \right\} \quad /8/$$

Здесь принято $V = \frac{d\delta}{d\varepsilon}$.

Система уравнений /8/ решается путем последовательных приближений:

- в первом приближении $\lambda = \frac{\pi}{2}$ и $C = \frac{Q}{\psi(1-V^2)}$
- во втором приближении $\lambda = \arccos \left[-\frac{2VV'}{(1-V^2)(1-V)} \right],$

$$C = Q \frac{1 - (\cos \lambda)^2}{\psi(1-V^2)} \left[\sqrt{1 - (\cos \lambda)^2} + 2 \frac{[(V')^2 + V'V^2](1-V^2)(1-V) + V(V')^2(1+2V-3V^3)}{(1-V^2)(1-V)^2} \right]^{-1}$$

Анализ результатов вычислений с помощью этих выражений показывает, что при больших и малых величинах параметра V разница между обоями приближениями невелика. Это позволяет в первом приближении принять в дальнейших исследованиях решение

$$Z(\varepsilon) = \frac{Q}{\psi(1-V^2)} \frac{\cos \cot \varepsilon}{\cos \varepsilon}$$

Соответствующее колебаниям с существенно большими амплитудами амплитудно-частотное уравнение в исходных переменных имеет вид

$$\dot{\varphi}(\alpha) = \frac{\psi(\alpha)}{\psi^2(\alpha) - \omega^2} \alpha$$

В главе получены также решения уравнений движений систем с учетом вязкого и турбулентного сопротивлений.

В третьей главе построены математические модели движений ряда конструкций и устройств, относящихся к системам с толкающими связями, дан анализ движения этих систем и составлен вычислительный алгоритм для построения амплитудно-частотных характеристик и графиков реализации режимов движений.

Рассмотрены системы с толкающими связями, имеющие мягкие упругие характеристики, заданные симметричными непрерывными функциями (осциллятор типа Дuffинга, физический маятник, качающаяся стойка с подвижной упругой связью, отцентрированное плавающее сооружение и консольная балка в симметричном магнитном поле).

Так, для осциллятора с уравнением движения типа Дuffинга ($R(\dot{x}) = \alpha \dot{x} - \beta \dot{x}^3$) критерием достижения границы области апериодических движений является достижение критической амплитуды $a = a_{cr} = \pm \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$, удовлетворяющей условиям /5/.

Границы областей устойчивости движений исследуемых систем построены с помощью уравнений критических состояний /4/, принимающих вид:

$$\text{для противофазных колебаний } F_3 = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \left(\frac{\alpha}{2} - \omega^2 \right); \quad /9/$$

$$\text{для синфазных колебаний } F_2 = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} (\alpha - \omega^2), \quad \omega_p^2 = \theta \left(1 - \frac{3}{4} \frac{\beta \alpha^2}{\alpha - \beta \alpha^2} \right)$$

$$\text{или } \omega_p^2 = \alpha - \frac{9}{4} \beta \alpha^2 \text{ при } F_2 = \frac{3}{2} \beta \alpha^2 \frac{\alpha - \frac{1}{2} \beta \alpha^2}{\alpha - \beta \alpha^2} = \frac{3}{2} \beta \alpha^2.$$

Для решения технических задач представляет интерес реализация резонансных режимов колебаний при источнике возбуждения ограниченной мощности. При весьма малых F критическая частота близка к $\omega \approx \sqrt{\frac{1}{2} \alpha}$, что часто наблюдается в реальных механических системах. Этот факт подтверждается результатами аналогового моделирования и решений на ЭВМ.

На форму противофазных колебаний с амплитудами, близкими к критическим, существенное влияние оказывают сопутствующие субгармоники четных порядков, что выражается в несимметричности траекторий колебаний по отношению к положению устойчивого равновесия. На графике реализации режимов движений эта граница ап-

проксимируется уравнением

$$F = \sqrt{\frac{2}{3} \frac{\alpha}{\beta}} \left(\frac{\alpha}{2} - \omega^2 \right)$$

Получены уравнения критических состояний и соответствующие им графики для диссипативных систем, реализованные в обычных и безразмерных параметрах. Графики реализации режимов колебаний построены на плоскостях параметров возбуждений (F, ω) и коэффициентов функции упругой характеристики (α, β) .

Рассмотрен ряд физических систем с мягкими упругими характеристиками, выраженными непрерывными несимметричными функциями вида

$$R(q) = \delta + \alpha q(t) + \lambda q^2(t) - \beta q^3(t)$$

Среди таких систем рассмотрено плавающее сооружение с нарушенной центровкой, электрический проводник, колеблющийся под действием электрического тока, консольная балка в несимметричном магнитном поле.

Решения уравнений движений систем с несимметричной упругой характеристикой получены симметризацией функции $F(t)$ путём переноса начала отсчёта координат.

Проведен анализ стационарных колебаний систем с упругими характеристиками, описываемыми сложными функциями (осциллятор с предварительно сжатыми толкающими связями, качающийся параллелепипед, осциллятор с люфтами и толкающими связями). С целью упрощения выражений для фазовой функции, выводы уравнений критических состояний производились путём замены исходной системы на установленных диапазонах перемещений эквивалентными системами, например, системой типа Дuffинга, линейной или кусочно-линейной системами. При подборе эквивалентных систем принималось условие сохранения координат экстремальных точек функций упругих характеристик и равенство амплитудных функций.

Перечисленные колебательные системы исследованы также с учётом действий диссипативных сил - вязкого и турбулентного сопротивления, а также при действии гармонических и полигармонических сил.

При анализе движения систем с произвольными периодическими возбуждениями приняты функции возбуждений, удовлетворяющие условиям Дирихле и разлагаемые в ряд Фурье:

$$F(t) = C + \sum_{m=1}^{\infty} D_m \sin(\omega_m t + \varphi_m) \quad (m=1, 2, 3, \dots),$$

где $C = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(t) dt$, $a_m = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi} F(t) \cos(\omega_m t) dt$, $b_m = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi} F(t) \sin(\omega_m t) dt$,

$$D_m = \sqrt{a_m^2 + b_m^2}, \quad \varphi_m = \arctg \frac{a_m}{b_m}, \quad \omega_m = m\omega.$$

Для движения недиссипативных несимметричных систем уравне-

ния критических состояний принимают вид

$$\left. \begin{aligned} f(a_n) &= \frac{\delta_n}{\psi(a_n)} \pm \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\psi(a_n) \psi_m D_m}{|\psi^2(a_n) - \omega_m^2|} \\ f(a_n) &= \frac{\delta_n}{\theta(a_n)} \pm \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\theta(a_n) \theta_m D_m}{|\theta^2(a_n) - \omega_m^2|} \end{aligned} \right\} /10/$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{D_m \psi_m}{\theta^2(a_n) - \omega_m^2} \left\{ \theta'(a_n) \left[1 + \frac{f(a_n) \theta'(a_n)}{f'(a_n) \theta(a_n)} \right]^2 - 2 \delta_n \omega_n^2 \frac{\theta'(a_n)}{\theta^2(a_n) f'(a_n)} \left[1 + \frac{f(a_n) \theta'(a_n)}{f'(a_n) \theta(a_n)} \right] - \omega_n^2 \right\} = 0$$

При исследовании влияния периодических возбудителей на колебания симметричных, несимметричных и сложных систем рассмотрены частные случаи периодических возбудителей - прямоугольной и треугольной форм. Результаты исследований движений рассмотренных систем в зоне основного резонанса свидетельствуют о том, что для простых периодических возбудителей, близких к гармоническим, достаточным является учет действия только основной гармоники (одного или двух первых членов ряда разложения функции возбуждения).

Рассмотрено влияние вязкого и турбулентного сопротивлений на движения упругих систем. Для границ неустойчивости периодических колебаний определены координаты экстремальных точек, устанавливающие области реализации только периодических движений. Характерным для турбулентного сопротивления является наличие также верхней экстремальной точки и соответственно замкнутой области неустойчивых движений, что объясняется усилением действия сопротивления при увеличении амплитуды колебаний. При коэффициентах турбулентного сопротивления превышающих величину $\eta_c = \frac{\sqrt{15}}{8} \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$ осциллятор типа Дuffинга не имеет области неустойчивости движений.

Для решения системы уравнений /10/ составлен вычислительный алгоритм и машинная программа. При практическом пользовании в частных задачах возможно использование аппроксимационных выражений, позволяющих вести расчеты с помощью программируемых микрокалькуляторов.

Четвертая глава посвящена изучению колебаний недостаточно полно исследованных симметричных и несимметричных упругих систем, обладающих эффектом проселкивания при существенно больших перемещениях под действием гармонических и полигармонических возбудителей.

При этом составлены математические модели движений стержневой системы типа фермы Мизеса, стержневого элемента, предва-

нительно напряженного центрально или внецентренно установленными затяжками, пологой бесшарнирной арки, пологого тонкостенного сферического купола, хлопающей мембраны и пологой цилиндрической панели.

Так для симметричных систем, движение которых описывается уравнением типа Дуффинга ($R(x) = -\alpha x + \beta x^3$), критерием перехода "малых" колебаний около одного из положений устойчивого равновесия к "большим" колебаниям около обоих положений равновесия одновременно является факт достижения в стационарном режиме колебаний критических амплитуд

$$Q_{\alpha\beta} \rightarrow 0, \quad Q_{\alpha\beta} = \pm \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$$

Уравнения критических состояний движения систем с возбуждением несимметричного полигармонического вида имеют вид:

для "малых" колебаний

$$\omega_{\alpha}(\alpha) = \theta(\alpha) \left\{ 1 - \frac{1}{9} \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^2 \left[\frac{\sqrt{2\alpha}}{\theta(\alpha)} \right]^2 \right\}, \quad \frac{1}{3} \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{D_m \gamma_m}{|2\alpha - \omega_m^2|};$$

для "больших" колебаний

$$\omega_{\alpha\beta}(\alpha) = \theta(\alpha) + Q \beta \epsilon \left(\alpha \right)^2 \beta \alpha^2 - \frac{1}{2} \frac{\beta \alpha^2 - \alpha}{\beta \alpha^2 - \alpha}, \quad \alpha \sqrt{\frac{\beta}{2} \left(\alpha^2 - 2 \frac{\alpha}{\beta} \right)} = \theta \sum_{m=1}^{\infty} \frac{D_m \gamma_m}{|\theta^2 - \omega_m^2|};$$

для перехода от "малых" к "большим" колебаниям

$$\sqrt{\frac{\alpha}{2\beta}} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{D_m}{|\alpha - \omega_m^2|}$$

Для случая гармонического возбуждения симметричных систем с проселкиванием составлены амплитудно-частотные характеристики и графики реализации режимов движений в обычных и безразмерных координатах.

При составлении математической модели движения предварительно напряженного стержня с затяжкой установлено, что при натяжении затяжки силой меньше эйлеровой стержень работает как система с жесткой упругой характеристикой, а при натяжении силой больше эйлеровой - как система с проселкиванием.

Конструктивно простой вид уравнений критических состояний для систем с полигармоническим возбуждением получен благодаря правильному выбору для исследований метода переменного масштаба.

По результатам исследований отмечено, что вид произвольного периодического возбуждения оказывает существенное влияние на стационарные колебания различных систем только при значительных амплитудах возбуждений, а также при значительных коэффициентах вязкого или турбулентного сопротивления.

Хорошая сходимость результатов аналитических и машинных

решений свидетельствует о возможности использования результатов исследований для решения практических задач.

Приложение содержит принятую в исследованиях методику нахождения границ областей реализации режимов движений систем при различных периодических возбуждениях с помощью АВМ и ЭВМ, вычислительный алгоритм и машинную программу для расчета координат амплитудно-частотных характеристик и границ областей реализации режимов движений нелинейных систем. Приведены материалы внедрения результатов исследований в практику строительного проектирования рядом организаций. Среди материалов имеются рекомендации по расчету параметров поперечных колебаний стержневых элементов металлоконструкций, предварительно напряженных затяжкой, и параметров бортовой качки вспомогательных плавучих средств, используемых при строительстве мостов и гидросооружений. Приведены основные результаты исследований систем с толкающими связями при частном случае периодических возбуждений – бигармоническом, а также результаты сопутствующих исследований, выходящих за пределы основной темы работы – исследований границ неустойчивых движений систем с жесткой упругой характеристикой.

В заключении сформулированы основные результаты и выводы диссертационной работы, даны рекомендации по их практическому использованию.

Основные результаты диссертационной работы состоят в следующем.

1. Получены приближенные решения уравнений движений сильно нелинейных систем при действии возбуждений гармонического и полигармонического вида. Составлены уравнения критических состояний для границ зон качественно различающихся режимов движений.

2. Построены математические модели движений ряда сооружений, конструкций и устройств, относящихся к симметричным и несимметричным системам с несколькими положениями равновесия. Решен ряд новых задач нелинейной динамики упругих систем, связанных с движением несимметричных систем с прощелкиванием и сложных систем с неаналитическим заданием функций упругой характеристики при произвольных периодических возбуждениях.

3. Исследовано влияние вязкого и турбулентного сопротивления на физическую реализацию различных режимов движений упругих систем с несколькими положениями равновесия. Для систем с турбулентным сопротивлением описана замкнутая область реализации неустойчивых движений. Отмечена хорошая сходимость результатов

аналитических решений, аналогового моделирования и расчетов с помощью ЭВМ.

4. Для симметричных и несимметричных систем с несколькими положениями равновесия выполнена численная реализация предложенного метода в виде модуля для вычислительных комплексов, предназначенных для использования в практике проектирования строительных объектов.

5. Разработан эффективный метод прогнозирования реализации режимов стационарных движений упругих систем с помощью графиков реализации режимов движений, построенных на плоскости параметров возбуждений или коэффициентов простых функций упругих характеристик систем. Для ряда систем графики построены в безразмерных координатах.

6. Результатами исследований проверена и подтверждена гипотеза о преобладании при резонансных колебаниях гармоник с основными частотами возмущающих сил. Гипотеза применена для нахождения границ зон реализации режимов движений и по результатам исследований сделаны ряд практических выводов.

7. Показана возможность применения методов исследований движений систем с несколькими положениями равновесия к решению задач проектирования арок, куполов, оболочек, предварительно напряженных стальных стоек и балок, фундаментов под машины с динамическими нагрузками, плавающих сооружений, чувствительных элементов приборов, предназначенных для испытаний конструкций.

СПИСОК РАБОТ, СОДЕРЖАЩИХ ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ

1. БОНДАРЬ Н.Г., ГОРБАТОВ В.С. Устойчивость стационарных колебаний упругих нелинейных систем//Тез.докл. IV Всесоюз. конф. по проблемам устойчивости в строительной механике, сент.1972 г., Харьков. -М.:1972. -С.146.

2. БОНДАРЬ Н.Г., ГОРБАТОВ В.С. Устойчивость стационарных колебаний при гармоническом возбуждении//Прикладная теория колебаний и динамика мостов: Сб. научн. тр.-Днепропетровск, 1972.-Вып.144.-С.32-66.

3. БОНДАРЬ Н.Г., ГОРБАТОВ В.С. Устойчивость стационарных колебаний при бигармоническом возбуждении//Прикладная теория колебаний и динамика мостов: Сб. научн. тр.-Днепропетровск, 1972.-Вып. 144.-С.66-88.

4. ГОРБАТОВ В.С. Орбитальная устойчивость нелинейных стацио-

нарных колебаний при произвольном возмущении //Днепропетровский инст.инж.жел.дор.трансп. - Днепропетровск, 1973. -14с. -Деп. в ЦИИИТЭП МПС, 1973, №52-73.

5. ГОРБАТОВ В.С. Устойчивость колебаний систем, имеющих разрывы и люфты, при периодическом возбуждении.//Вопросы проектирования, строительства, эксплуатации и механизации аэропортов: Межвуз. сб.научн.тр.-Киев: 1976.-вып. I.-С.64-74.

6. ГОРБАТОВ В.С. Об изменениях в процессе эксплуатации условий устойчивости нелинейно упругих систем//Тез.докл.Республ.конф. по технической эксплуатации зданий и сооружений аэропортов, ноябрь 1975, -Киев: 1975.-С.26-27.

7. БОНДАРЬ Н.Г., ГОРБАТОВ В.С. Применение метода переменного масштаба для решения нелинейных задач бортовой качки и остойчивости корабля//Вопросы динамики мостов и теории колебаний: Межвуз.сб. научн.тр. -Днепропетровск, 1978.-вып.200/22.-С.21-36.

8. БОНДАРЬ Н.Г., ГОРБАТОВ В.С. Стационарные колебания упругих систем с перескоком//Вопросы динамики мостов и теории колебаний: Межвуз.сб.научн.тр.-Днепропетровск, 1978.-Вып.200/22.-С.3-21.

9. ГОРБАТОВ В.С. Динамика некоторых видов большепролетных покрытий зданий гражданской авиации//Тез.докл.Республ.конф.по проектир.,строит. и экспл. аэропортов, октябрь 1980, Киев.-Киев,1980.-С.38-39.

10. ГОРБАТОВ В.С. Колебания купольных и мембранных элементов покрытий зданий предприятий гражданской авиации//Вопросы проектирования, строительства и механизации аэропортов:Межвуз.сб.научн.тр.-Киев, 1982.-В.4.-С.23-28.

11. ГОРБАТОВ В.С. Стационарные колебания предварительно напряженных стальных балок каркасных зданий аэропортов//Вопросы проектирования, строительства и механизации аэропортов: Межвуз. сб.научн.тр. -Киев, 1983.-Вып.5.-С.58-63.

12. ГОРБАТОВ В.С. Прогнозирование динамических характеристик предварительно напряженных стержневых элементов металлоконструкций//Тез.докл.Республ.конф. по проблемам проектир.,строит. и эксплуат. аэропортов, ноябрь 1985, Киев.-Киев, 1985.-С.7.

Горбатов Виталий Сергеевич

Исследование колебаний упругих систем с несколькими
положениями равновесия при периодических возбуждениях

ОГ.02.03 – Строительная механика

Подписано к печати 3.II.87. БТ 70355

Формат 60x84 1/16. Бумага для копирочных аппаратов. Ротапринт.

Усл.печ.л. I,I. Уч.-изд.л. I,O. Тираж 100 экз. Заказ № 1622.

Бесплатно.

Участок оперативной полиграфии ДИИТа. 320700, ГСП, г.Днепропетровск,
ул.В.А.Лазаряна, 2

Сканировала Юнаковская В. В.

ИТЬ
ДНУЖТ