



ISSN 9125 0912

ВІСНИК

**Дніпропетровського
університету**

2013 Т 21 № 6/1

Серія

МАТЕМАТИКА

Випуск 18

УДК 517.5

Приближение алгебраическими многочленами в метрических пространствах L_ψ

Т. А. Агошкова

Днепропетровский национальный университет железнодорожного транспорта
имени академика В. Пазаряна,
Днепропетровск 49010. E-mail: tanya_agoshkova@mail.ru

У пространствах $L_\psi[-1, 1]$ непериодических функций с метрикой $\rho(f, 0)_\psi = \int_{-1}^1 \psi(|f(x)|) dx$, где ψ – функция типа модуля непрерывности, исследованы неравенства Джексона с кратным модулем непрерывности в случае приближения алгебраическими многочленами. Доказано, что прямая теорема Джексона имеет место тогда и только тогда, когда нижний индекс растяжения функции ψ не равен 0.

Ключевые слова: прямая теорема Джексона, кратный модуль непрерывности, нижний индекс растяжения, алгебраический многочлен.

В пространствах $L_\psi[-1, 1]$ непериодических функций с метрикой $\rho(f, 0)_\psi = \int_{-1}^1 \psi(|f(x)|) dx$, где ψ – функция типа модуля непрерывности, исследованы неравенства Джексона с кратным модулем непрерывности в случае приближения алгебраическими многочленами. Доказано, что прямая теорема Джексона имеет место тогда и только тогда, когда нижний индекс растяжения функции ψ не равен 0.

Ключевые слова: прямая теорема Джексона, кратный модуль непрерывности, нижний индекс растяжения, алгебраический многочлен.

In the space $L_\psi[-1, 1]$ of non-periodic functions with metric $\rho(f, 0)_\psi = \int_{-1}^1 \psi(|f(x)|) dx$, where ψ is a function of the type of modulus of continuity, we study Jackson inequality for modulus of continuity of k-th order in the case of approximation by algebraic polynomials. It is proved that the direct Jackson theorem is true if and only if the lower dilation index of the function ψ is not equal to zero.

Key words: the direct Jackson theorem, modulus of continuity, modulus of continuity of k-th order, the lower dilation index, an algebraic polynomial.

1. Введение

Пусть $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ – действительнoзначные функции; $L_0 \equiv L_0[-1, 1]$ – множество всех таких функций, которые почти всюду на $[-1, 1]$ конечны и измеримы; Ω – класс функций $\psi : R_+ \rightarrow R_+$, являющихся модулем непрерывности, то есть ψ –

непрерывная неубывающая функция. $\psi(0) = 0$, $\psi(x+y) \leq \psi(x) + \psi(y)$ для всех $x, y \in R_+$.

Через $L_\psi \equiv L_\psi[-1, 1]$ обозначим метрическое пространство

$$L_\psi = \{f \in L_0[-1, 1] : \|f\|_\psi := \int_{-1}^1 \psi(|f(x)|) dx < \infty\}.$$

В случае $\psi(t) = t^p$, $0 < p \leq 1$, получаем пространства $L_p[-1, 1]$.

Будем рассматривать вопросы аппроксимации функций из $L_\psi[-1, 1]$ алгебраическими многочленами.

Определим для $t \in \mathbb{R}$ разностные формы

$$\Delta_t^k = \Delta_t(\Delta_t^{k-1}), \quad \Delta_t^1 f(x) := \Delta_t f(x) := f(x+t) - f(x), \quad k \in \mathbb{N},$$

и соответствующий модуль непрерывности функции f в пространстве L_ψ при $0 \leq h \leq \frac{2}{k}$:

$$\omega_k(f, h)_\psi = \sup_{0 \leq t \leq h} \int_{-1}^{1-kt} \psi(|\Delta_t^k f(x)|) dx.$$

$$E_n(f)_\psi = \inf_{P_n} \|f - P_n\|_\psi$$

– наилучшее приближение f в L_ψ алгебраическими многочленами степени не выше n .

Пусть $\beta(t)$, $t \in (0, \infty)$ – произвольная строго положительная всюду конечная функция. Ее функцией растяжения [1, с. 75] называют функцию $M_\beta(s)$, $s \in (0, \infty)$,

$$M_\beta(s) = \sup_{0 < t < \infty} \frac{\beta(st)}{\beta(t)}.$$

Общие свойства M_β в [1, с. 76]. В случае когда $\psi \in \Omega$ для функции M_ψ существует число γ_ψ (называемое нижним показателем растяжения функции) такое, что:

- 1). $\gamma_\psi \in [0, 1]$;
- 2). $M_\psi(s) \geq s^{\gamma_\psi}$, $\forall s \in (0, 1]$;
- 3). для любого $\varepsilon > 0$ при $0 < s < 1$ с некоторой константой C_ε

$$M_\psi(s) \leq C_\varepsilon s^{\gamma_\psi - \varepsilon}. \quad (1.1)$$

Для периодических функций одной переменной из L_p при $0 < p < 1$ и для $k = 1$ неравенства типа Джексона доказаны независимо в [2, 3], а для случая любого натурального k неравенство типа Джексона

$$E_n^*(f)_p \leq C_{k,p} \omega_k^* \left(\frac{1}{n+1}, f \right)_p, \quad (1.2)$$

где $E_n^*(f)_p = \inf_{T_n} \|f - T_n\|_p$, T_n - тригонометрический полином порядка не выше n и

$$\omega_k^*(f, h)_p = \sup_{|t| \leq h} \|\Delta_t^k f\|_p = \left(\int_0^{2\pi} |\Delta_t^k f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

получены в работе [4].

В [5] для полного модуля непрерывности доказаны неравенства Джексона для периодических функций многих переменных в L_p при $0 < p < 1$.

В [6] для $k = 1$ сформулирована задача о существовании неравенств Джексона для аппроксимации в шкале пространств L_ψ и приведено достаточное условие для некоторых L_ψ для существования этой теоремы для периодических функций многих переменных. А в [7] полностью решена эта задача для периодических функций многих переменных из L_ψ при $k = 1$ и доказано, что прямая теорема Джексона имеет место тогда и только тогда, когда нижний индекс растяжения функции ψ не равен 0.

Для непериодического одномерного случая в пространствах L_p при $0 < p < 1$ для любого натурального k доказано неравенство вида (1.2) в [8] (см. также [9]) и независимо получен результат при $k = 1$ в работе [10].

В [11] исследовалась аппроксимация в классах Орлича $\varphi(L)$ любой так называемой нелокализованной системой (в том числе и тригонометрической), где под $\varphi(x)$ понимали четкую, непрерывную, строго монотонную на $[0; \infty)$ функцию, такую, что $\varphi(0) = 0$ и $\varphi(2x) \leq C_\varphi \varphi(x)$, $x \geq 0$. Было доказано, что если функция $\varphi(x)$ существенно отличается от степенной в окрестности 0 или ∞ , то неравенства типа Джексона в форме (1.2) невозможны.

В настоящей работе в одномерном случае в пространствах L_ψ для любого натурального k исследована прямая теорема Джексона в случае аппроксимации алгебраическими многочленами. Доказано, что прямая теорема Джексона имеет место тогда и только тогда, когда нижний индекс растяжения функции ψ не равен 0.

2. Вспомогательные утверждения

Лемма 1. [12]. Пусть

$$\theta_z(x) = \begin{cases} 1, & -1 \leq x < z, \\ 0, & z \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (2.1)$$

Тогда для любых $n = 0, 1, \dots$, $l = 1, 2, \dots$ и фиксированного $z \in [-1, 1]$ существует алгебраический многочлен $R_z(x)$ степени не выше $2nl$, такой, что

$$|\theta_z(x) - R_z(x)| \leq \frac{A(l)}{(n|\arccos x - \arccos z| + 1)^{2l-1}}, \quad -1 \leq x \leq 1. \quad (2.2)$$

Лемма 2. [13, с. 79]. Если алгебраический многочлен P_n степени не выше n удовлетворяет условию $|P_n| \leq L$ на отрезке $[a, b]$, то в любой точке за его пределами

$$|P_n(x)| \leq L \left| \cos n \arccos \frac{2x - a - b}{b - a} \right|. \quad (2.3)$$

Известно, что для алгебраических полиномов $P_n(x)$ степени не выше n в L_p при $p \geq 1$ справедливо неравенство [13, с. 251]

$$\max_{a \leq x \leq b} |P_n(x)|^p \leq \frac{2(p+1)}{b-a} n^2 \|P_n\|_{p[a,b]}^p. \quad (2.4)$$

Неравенство (2.4), как доказано в [8], верно и для $0 < p < 1$. Докажем аналог неравенства (2.4) в L_ψ .

Лемма 3. Пусть $P_n(x)$ – алгебраический многочлен степени не выше n , тогда при условии, что $\gamma_\psi > 0$, имеем

$$\psi \left(\max_{a \leq x \leq b} |P_n(x)| \right) \leq \frac{2n^2}{b-a} C_{\gamma_\psi} \|P_n\|_{\psi[a,b]}.$$

Доказательство леммы 3. Чтобы установить данное неравенство, воспользуемся предложенным методом доказательства неравенства (2.4) в [13, с. 251]. Пусть $|P_n(x_0)| = \max_{a \leq x \leq b} |P_n(x)|$, где $x_0 \in [a, b]$. Для всех $x \in [a, b]$

$$|P_n(x) - P_n(x_0)| \leq |x - x_0| \max_{a \leq u \leq b} |P'_n(u)|.$$

В силу неравенства Маркова на отрезке $[a, b]$

$$\max_{a \leq u \leq b} |P'_n(u)| \leq \frac{2n^2}{b-a} \max_{a \leq u \leq b} |P_n(u)|$$

имеем:

$$|P_n(x_0)| - |P_n(x)| \leq \frac{2n^2}{b-a} |x - x_0| |P_n(x_0)|.$$

Отсюда

$$\psi(|P_n(x_0)| - |P_n(x)|) \leq \psi \left(\frac{2n^2}{b-a} |x - x_0| |P_n(x_0)| \right).$$

$$\begin{aligned} \psi(|P_n(x_0)|) - \psi(|P_n(x)|) &\leq \psi(|P_n(x_0)| - |P_n(x)|) \leq \\ &\leq \psi \left(\frac{2n^2}{b-a} |x - x_0| |P_n(x_0)| \right) \leq M_\psi \left(\frac{2n^2}{b-a} |x - x_0| \right) \psi(|P_n(x_0)|), \end{aligned}$$

$$\psi(|P_n(x_0)|) \left(1 - M_\psi \left(\frac{2n^2}{b-a} |x - x_0| \right) \right) \leq \psi(|P_n(x)|).$$

Для определенности будем считать, что $x_0 \leq \frac{b-a}{2}$. Тогда

$$\psi(|P_n(x_0)|) \int_{x_0}^{x_0 + \frac{b-a}{2n^2}} \left(1 - M_\psi \left(\frac{2n^2}{b-a} |x - x_0| \right) \right) dx \leq \int_a^b \psi(|P_n(x)|) dx.$$

Учитывая, что

$$\int_{x_0}^{x_0 + \frac{b-a}{2n^2}} M_\psi \left(\frac{2n^2}{b-a} (x - x_0) \right) dx = \frac{b-a}{2n^2} \int_0^1 M_\psi(y) dy,$$

получаем

$$\psi(|P_n(x_0)|) \left(\frac{b-a}{2n^2} - \frac{b-a}{2n^2} \int_0^1 M_\psi(y) dy \right) \leq \int_a^b \psi(|P_n(x)|) dx,$$

$$\psi(|P_n(x_0)|) \frac{b-a}{2n^2} \left(1 - \int_0^1 M_\psi(y) dy \right) \leq \int_a^b \psi(|P_n(x)|) dx,$$

$$\psi \left(\max_{a \leq x \leq b} |P_n(x)| \right) \leq \frac{2n^2}{b-a} \frac{1}{\left(1 - \int_0^1 M_\psi(y) dy \right)} \int_a^b \psi(|P_n(x)|) dx.$$

Так как $\gamma_\psi > 0$, то $M_\psi(y) < 1$ при любом $y \in [0, 1]$, а следовательно $\int_0^1 M_\psi(y) dy < 1$.

При доказательстве теоремы Джексона в L_p при $0 < p < 1$ для неперiodического случая в [8] использовалась промежуточная аппроксимация кусочно-полиномиальными функциями. Применим эту же идею и при доказательстве теоремы Джексона в L_ψ .

Рассмотрим разбиение отрезка $[-1, 1]$ на $n+1$ равных частей:

$$-1 = x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} = 1$$

и на каждом промежутке $\Delta_i = [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, n+1$ зададим алгебраический многочлен P_i степени не выше $k-1$. С помощью функции (2.1) построим кусочно-полиномиальную функцию порядка k

$$\mathcal{S}_{k-1, n+1} = P_{n+1}(x) + \sum_{i=1}^n (P_i(x) - P_{i+1}(x)) \theta_{x_i}(x). \quad (2.5)$$

Теорема 1. [5]. Если $f \in L_\psi[-1, 1]$, $\psi \in \Omega$, то существует кусочно-полиномиальная функция $\mathcal{S}_{k-1, n+1}$, такая, что для $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\|f - \mathcal{S}_{k-1, n+1}\|_\psi \leq C_{\psi, k} \omega_k \left(f, \frac{1}{n+1} \right)_\psi. \quad (2.6)$$

Теорема 1 – это аналог теоремы Уитни. В нормированных пространствах эта теорема была доказана Уитни, в работе [5] доказан многомерный аналог теоремы Уитни в L_p , $0 < p < 1$ и отмечено, что полученная теорема допускает обобщения на пространства L_ψ .

3. Основные результаты

Теорема 2. Пусть $f \in L_\psi[-1, 1]$, $\gamma_\psi > 0$. Тогда для любых натуральных k , $n \geq k - 1$ выполняются неравенства

$$E_n(f)_\psi \leq C_{\psi,k} \omega_k \left(f, \frac{1}{n+1} \right)_\psi. \quad (3.1)$$

Доказательство теоремы 2. Пусть $\mathcal{S}_{k-1,n+1}$ – кусочно-полиномиальная функция, которая по теореме 1 осуществляет приближение

$$\|f - \mathcal{S}_{k-1,n+1}\|_\psi \leq C_{\psi,k} \omega_k \left(f, \frac{1}{n+1} \right)_\psi.$$

В выражении

$$\mathcal{S}_{k-1,n+1} = P_{n+1}(x) + \sum_{i=1}^n (P_i(x) - P_{i+1}(x)) \theta_{x_i}(x)$$

функции $\theta_{x_i}(x)$ заменим многочленами $R_{x_i}(x)$ из леммы 1. В результате получим алгебраический многочлен

$$\mathcal{Q}_{n,k} = P_{n+1}(x) + \sum_{i=1}^n (P_i(x) - P_{i+1}(x)) R_{x_i}(x)$$

степени не выше $2nl + k - 1$.

При достаточно малом $\varepsilon > 0$, таком, что $\gamma_\psi - \varepsilon > 0$, выберем натуральное число l так, что

$$(2l - k)(\gamma_\psi - \varepsilon) > 1. \quad (3.2)$$

Положим $l = \gamma_0 + k$, где $\gamma_0 = \left\lfloor \frac{1}{\gamma_\psi} \right\rfloor$ и в дальнейшем будем считать l фиксированным таким образом.

Рассмотрим промежуток $\overline{\Delta}_i = [x_i, x_i + h) \subset \Delta_i$, где $h = \frac{2}{k(n+1)}$, и обозначим

$$\|P_i - P_{i+1}\|_{\psi, \overline{\Delta}_i} = \int_{x_i}^{x_i+h} \psi(|P_i(x) - P_{i+1}(x)|) dx.$$

Так как

$$\mathcal{S}_{k-1,n+1}(f, x) - \mathcal{Q}_{n,k}(f, x) = \sum_{i=1}^n (P_i(x) - P_{i+1}(x)) (\theta_{x_i}(x) - R_{x_i}(x)),$$

то

$$\begin{aligned}
 \|\mathcal{S}_{k-1,n+1}(f, x) - \mathcal{Q}_{n,k}(f, x)\|_\psi &= \int_{-1}^1 \psi \left(\left| \sum_{i=1}^n (P_i(x) - P_{i+1}(x)) (\theta_{x_i}(x) - R_{x_i}(x)) \right| \right) dx \leq \\
 &\leq \int_{-1}^1 \sum_{i=1}^n \psi (|P_i(x) - P_{i+1}(x)| |\theta_{x_i}(x) - R_{x_i}(x)|) dx \leq \\
 &\leq \sum_{i=1}^n \left[\int_{\overline{\Delta}_i} + \int_{[-1,1] \setminus \overline{\Delta}_i} \right] \psi (|P_i(x) - P_{i+1}(x)| |\theta_{x_i}(x) - R_{x_i}(x)|) dx.
 \end{aligned}$$

Так как

$$|\arccos x - \arccos x_i| \geq |x - x_i|, \quad -1 \leq x \leq 1,$$

то используя (2.3) получаем

$$\begin{aligned}
 &\|\mathcal{S}_{k-1,n+1}(f, x) - \mathcal{Q}_{n,k}(f, x)\|_\psi \leq \\
 &\leq \sum_{i=1}^n \left[\int_{\overline{\Delta}_i} + \int_{[-1,1] \setminus \overline{\Delta}_i} \right] \psi \left(|P_i(x) - P_{i+1}(x)| \left| \frac{A(l)}{(n|\arccos x - \arccos x_i| + 1)^{2l-1}} \right| \right) dx \leq \\
 &\leq C_l \sum_{i=1}^n \left[\int_{\overline{\Delta}_i} + \int_{[-1,1] \setminus \overline{\Delta}_i} \right] \psi (|P_i(x) - P_{i+1}(x)|) M_\psi \left(\left| (n|x - x_i| + 1)^{1-2l} \right| \right) dx = C_l [T_1 + T_2].
 \end{aligned}$$

На предпоследнем шаге использовано неравенство $\psi(st) \leq M_\psi(s)\psi(t)$, вытекающее из определения функции растяжения $M_\psi(s)$.

В силу леммы 3 для $x \in \overline{\Delta}_i$

$$\begin{aligned}
 \psi (|P_i(x) - P_{i+1}(x)|) &\leq \psi \left(\max_{x \in \overline{\Delta}_i} |P_i(x) - P_{i+1}(x)| \right) \leq \\
 &\leq \frac{2(k-1)^2}{h} C_{\gamma_\psi} \|P_i - P_{i+1}\|_{\psi, [x_i, x_i+h]}. \quad (3.3)
 \end{aligned}$$

Из неравенства (1.1), при условии (3.2), имеем

$$\begin{aligned}
 \int_{x_i}^{x_i+h} M_\psi \left(\left| (n|x - x_i| + 1)^{1-2l} \right| \right) dx &= \int_0^h M_\psi \left((nx + 1)^{1-2l} \right) dx \leq \\
 &\leq C_\varepsilon \int_0^h (nx + 1)^{(1-2l)(\gamma_\psi - \varepsilon)} dx \leq C_\varepsilon \frac{1}{n} \int_1^{nh+1} x^{(1-2l)(\gamma_\psi - \varepsilon)} dx \leq C_{\varepsilon, \gamma_\psi, k} \frac{1}{n}. \quad (3.4)
 \end{aligned}$$

Тогда из (3.3) и (3.4) следует, что

$$\begin{aligned} T_1 &\leq \sum_{i=1}^n \frac{2(k-1)^2}{h} C_{\gamma_\psi} \|P_i - P_{i+1}\|_{\psi, [x_i, x_i+h]} C_{\varepsilon, \gamma_\psi, k} \frac{1}{n} \leq \\ &\leq B_{\varepsilon, \gamma_\psi, k} \sum_{i=1}^n \|P_i - P_{i+1}\|_{\psi, [x_i, x_i+h]}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

В силу леммы 2, учитывая (3.3), и так как

$$|\cos n \arccos t| = \frac{1}{2} \left| \left(t + \sqrt{t^2 + 1} \right)^n + \left(t - \sqrt{t^2 + 1} \right)^n \right| \leq 2^n |t|^n, \quad |t| > 1,$$

для $x \in [-1, 1] \setminus \overline{\Delta}_i$ получаем

$$\begin{aligned} \psi(|P_i(x) - P_{i+1}(x)|) &\leq \frac{2(k-1)^2}{h} C_{\gamma_\psi} \|P_i - P_{i+1}\|_{\psi, \overline{\Delta}_i} M_\psi \left(\left| \cos(k-1) \arccos \frac{2x - 2x_i - h}{h} \right| \right) \\ &\leq D_{\gamma_\psi, k} h^{-1} \|P_i - P_{i+1}\|_{\psi, \overline{\Delta}_i} M_\psi \left(\left| \frac{2x - 2x_i - h}{h} \right|^{k-1} \right). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Значит

$$T_2 \leq D_{\gamma_\psi, k} h^{-1} \sum_{i=1}^n \|P_i - P_{i+1}\|_{\psi, \overline{\Delta}_i} \int_{[-1, 1] \setminus \overline{\Delta}_i} M_\psi \left(\left| \frac{2x - 2x_i - h}{h} \right|^{k-1} \right) M_\psi \left((n|x - x_i| + 1)^{1-2l} \right) dx$$

При условии (3.2) и неравенства (1.1) имеем

$$\begin{aligned} &\int_{[-1, 1] \setminus \overline{\Delta}_i} M_\psi \left(\left| \frac{2x - 2x_i - h}{h} \right|^{k-1} \right) M_\psi \left((n|x - x_i| + 1)^{1-2l} \right) dx \leq \\ &\leq C_\varepsilon \int_{-1}^1 \left(\left| \frac{2x - 2x_i - h}{h} \right|^{k-1} \right)^{\gamma_\psi - \varepsilon} \left((n|x - x_i| + 1)^{1-2l} \right)^{\gamma_\psi - \varepsilon} dx = \\ &= K_\varepsilon h^{-(k-1)(\gamma_\psi - \varepsilon)} \int_{-1}^1 \frac{|x - x_i - \frac{h}{2}|^{(k-1)(\gamma_\psi - \varepsilon)}}{(n|x - x_i| + 1)^{(2l-1)(\gamma_\psi - \varepsilon)}} dx \leq \\ &\leq 2K_\varepsilon h^{-(k-1)(\gamma_\psi - \varepsilon)} \int_0^2 \frac{x^{(k-1)(\gamma_\psi - \varepsilon)} + h^{(k-1)(\gamma_\psi - \varepsilon)}}{(nx + 1)^{(2l-1)(\gamma_\psi - \varepsilon)}} dx \leq \\ &\leq K_{\varepsilon, \gamma_\psi, k} h^{-(k-1)(\gamma_\psi - \varepsilon)} n^{-(k-1)(\gamma_\psi - \varepsilon) - 1} \int_1^{2n+1} \frac{dx}{x^{(2l-k)(\gamma_\psi - \varepsilon)}} \leq \end{aligned}$$

$$\leq E_{\varepsilon, \gamma_{\psi}, k} h^{-(k-1)(\gamma_{\psi}-\varepsilon)} n^{-(k-1)(\gamma_{\psi}-\varepsilon)-1}.$$

Следовательно

$$\begin{aligned} T_2 &\leq F_{\varepsilon, \gamma_{\psi}, k} h^{-1-(k-1)(\gamma_{\psi}-\varepsilon)} n^{-1-(k-1)(\gamma_{\psi}-\varepsilon)} \sum_{i=1}^n \|P_i - P_{i+1}\|_{\psi, \overline{\Delta}_i} \leq \\ &\leq G_{\varepsilon, \gamma_{\psi}, k} \sum_{i=1}^n \|P_i - P_{i+1}\|_{\psi, \overline{\Delta}_i}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Итак, в силу (3.5) и (3.7)

$$\|\mathcal{S}_{k-1, n+1}(f, x) - \mathcal{Q}_{n, k}(f, x)\|_{\psi} \leq (B_{\varepsilon, \gamma_{\psi}, k} + G_{\varepsilon, \gamma_{\psi}, k}) \sum_{i=1}^n \|P_i - P_{i+1}\|_{\psi, \overline{\Delta}_i}.$$

Если $x \in \overline{\Delta}_{i-1}$, то $x + \nu h \in \Delta_{i-1}$ для $\nu = 0, 1, \dots, k-1$, а $x + kh \in \overline{\Delta}_i$. Тогда в [8]

$$\Delta_h^k \mathcal{S}_{k-1, n+1}(x) = P_{i+1}(x + kh) - P_i(x + kh)$$

и

$$\sum_{i=1}^n \int_{x_i}^{x_i+h} \psi(|P_{i+1} - P_i|) dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_{i-1}+h} \psi(|\Delta_h^k \mathcal{S}_{k-1, n+1}(x)|) dx \leq \omega_k(\mathcal{S}_{k-1, n+1}, h)_{\psi}.$$

Таким образом,

$$\|\mathcal{S}_{k-1, n+1}(f, x) - \mathcal{Q}_{n, k}(f, x)\|_{\psi} \leq (B_{\varepsilon, \gamma_{\psi}, k} + G_{\varepsilon, \gamma_{\psi}, k}) \omega_k\left(\mathcal{S}_{k-1, n+1}, \frac{2}{k(n+1)}\right)_{\psi}.$$

Так как

$$\begin{aligned} \omega_k\left(\mathcal{S}_{k-1, n+1}, \frac{2}{k(n+1)}\right)_{\psi} &\leq \omega_k\left(\mathcal{S}_{k-1, n+1} - f, \frac{2}{k(n+1)}\right)_{\psi} + \omega_k\left(f, \frac{2}{k(n+1)}\right)_{\psi} \leq \\ &\leq J_{k, \psi} \|\mathcal{S}_{k-1, n+1} - f\|_{\psi} + G_k \omega_k\left(f, \frac{1}{(n+1)}\right)_{\psi}, \end{aligned}$$

с учетом неравенства (2.6) получаем

$$\begin{aligned} \|f - \mathcal{Q}_{n, k}(f, x)\|_{\psi} &\leq \|f - \mathcal{S}_{k-1, n+1}(f, x)\|_{\psi} + \|\mathcal{S}_{k-1, n+1}(f, x) - \mathcal{Q}_{n, k}(f, x)\|_{\psi} \leq \\ &\leq C_{\psi, k} \omega_k\left(f, \frac{1}{n+1}\right)_{\psi} + H_{\varepsilon, \gamma_{\psi}, k} \omega_k\left(\mathcal{S}_{k-1, n+1}, \frac{1}{n+1}\right)_{\psi} \leq N_{\varepsilon, \psi, k} \omega_k\left(f, \frac{1}{n+1}\right)_{\psi}. \end{aligned}$$

Итак, найдена последовательность многочленов $\mathcal{Q}_{n, k}$, $n = 0, 1, \dots$, степени не выше $2n(\gamma_0 + k) + k - 1$, для каждого из которых справедливо неравенство

$$\|f - \mathcal{Q}_{n, k}(f, x)\|_{\psi} \leq N_{\varepsilon, \psi, k} \omega_k\left(f, \frac{1}{n+1}\right)_{\psi}.$$

Если $n \geq k - 1$, то найдется число m , $m = 0, 1, \dots$, такое, что

$$2m(\gamma_0 + k) + k - 1 \leq n \leq 2(m + 1)(\gamma_0 + k) + k - 1.$$

Положив

$$\mathcal{Q}_n = \mathcal{Q}_{m,k},$$

получаем, что $\mathcal{Q}_n$ – искомый многочлен, то есть

$$\|f - \mathcal{Q}_n(f, x)\|_\psi \leq V_{\psi,k} \omega_k \left(f, \frac{1}{n+1} \right)_\psi.$$

Теорема 3. Пусть $\psi \in \Omega$, γ_ψ – нижний показатель растяжения ψ . Если $\gamma_\psi = 0$, то в пространстве L_ψ неравенства Джексона в форме

$$\sup_n \sup_{f \in L_\psi, f \neq \text{const}} \frac{E_{n-1}(f)_\psi}{\omega_k(f, \alpha_n)_\psi} < \infty$$

невозможны ни при каком выборе последовательности $\{\alpha_n\}$ такой, что $\alpha_n > 0$, $\alpha_n \downarrow 0$.

Доказательство теоремы 3. Воспользуемся методом доказательства аналогичного результата в случае приближения тригонометрическими полиномами в [7].

Оценим снизу наилучшие приближения функций

$$f_A(x) = A \operatorname{sign} \sin \pi x, \quad A > 0.$$

Пусть $\delta \in (0, 1)$, P_{n-1} – произвольный алгебраический многочлен,

$$e = \{x \in (0, 1) : |f_A(x) - P_{n-1}(x)| > \delta A\},$$

$$e' = \{x \in (0, 1) : |f_A(x) - P_{n-1}(x)| \leq \delta A\}.$$

Возможны два случая:

1). пусть $\mu e > \frac{1}{2}$; тогда

$$\|f_A - P_{n-1}\|_\psi > \int_e \psi(|f_A(x) - P_{n-1}(x)|) dx > \frac{1}{2} \psi(\delta A). \quad (3.8)$$

2). пусть $\mu e' \geq \frac{1}{2}$. Рассмотрим

$$K(n) := \sup_{e': \mu e' \geq \frac{1}{2}} \sup_{P_{n-1}} \frac{\max_{x \in [-1, 1]} |P_{n-1}(x)|}{\max_{x \in e'} |P_{n-1}(x)|}$$

и докажем, что при каждом n

$$K(n) < \infty. \quad (3.9)$$

Пусть $\max\{|P_{n-1}(x)|: x \in e'\} \leq 1$. График полинома P_{n-1} имеет не более $n - 1$ участков монотонности. На участке монотонности может быть две точки пересечения графиков P_{n-1} и f_A или одна в зависимости от того, содержит этот участок монотонности окрестность точки разрыва f_A или нет. Поэтому множество e' состоит не более чем из $n + 1$ отрезков, и найдется отрезок $I = [a, b] \in e'$ такой, что

$$\mu I \geq \frac{1}{4(n+1)}. \quad \max_{x \in I} |P_{n-1}(x)| \leq 1.$$

Применим неравенство (2.3), учитывая, что

$$|\cos n \arccos t| \leq 2^n |t|^n, \quad |t| > 1,$$

получим при $x \in [-1, 1] \setminus I$

$$\begin{aligned} |P_{n-1}(x)| &\leq 2^{n-1} \left| \frac{2x - (a+b)}{b-a} \right|^{n-1} \leq 2^{n-1} 4^{n-1} (n+1)^{n-1} (2|x| + |a+b|)^{n-1} \leq \\ &\leq 2^{3(n-1)} (n+1)^{n-1} (2|x| + 2)^{n-1} = 2^{4(n-1)} (n+1)^{n-1} (|x| + 1)^{n-1} \end{aligned}$$

и

$$\max_{x \in [-1, 1]} |P_{n-1}(x)| \leq 2^{5(n-1)} (n+1)^{n-1}.$$

Свойство (3.9) доказано.

На множестве $(0, 1]$ функция

$$f_A(x) - P_{n-1}(x) = A - P_{n-1}(x)$$

является полиномом.

Из (3.9) следует, что

$$\|A - P_{n-1}\|_{C[-1, 1]} \leq K(n) \max_{x \in e'} |A - P_{n-1}(x)| = K(n) \max_{x \in e'} |f_A(x) - P_{n-1}(x)| \leq K(n) \delta A.$$

Применим неравенство Маркова для производной алгебраического многочлена:

$$\begin{aligned} \|P'_{n-1}\|_{C(0, 1)} &= \|(A - P_{n-1})'\|_{C[-1, 1]} \leq \\ &\leq (n-1)^2 \|A - P_{n-1}\|_{C[-1, 1]} \leq (n-1)^2 K(n) \delta A. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Будем считать, что с самого начала δ выбрана настолько малой, что выполнено условие

$$(n-1)^2 K(n) \delta < (1 - \delta). \quad (3.11)$$

Из (3.10), (3.11) следует, что

$$\|P'_{n-1}\|_{C[-1, 1]} < A(1 - \delta) \quad (3.12)$$

при условии, что $\mu e' \geq \frac{1}{2}$.

Сравним графики многочлена P_{n-1} и линейной функции $y = A(1 - \delta)x$ на полуинтервале $[-1, 0)$. Из (3.12) следует, что множество

$$d = \{x \in [-1, 0) : P_{n-1}(x) > -A(1 - \delta)\} \quad (3.13)$$

имеет меру: $\mu d \geq \frac{1}{2}$.

На множестве $[-1, 0)$

$$f_A(x) - P_{n-1}(x) = -A - P_{n-1}(x).$$

Поэтому в случае, когда $\mu e' \geq \frac{1}{2}$, учитывая (3.13), получаем

$$\begin{aligned} \|f_A - P_{n-1}\|_\psi &> \int_d \psi(|f_A(x) - P_{n-1}(x)|) dx = \\ &= \int_d \psi(|A + P_{n-1}(x)|) dx > \psi(\delta A) \mu d \geq \frac{1}{2} \psi(\delta A). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Из полученных оценок (3.8), (3.14) при всех $n \geq 1$ следует

$$E_{n-1}(f_A)_\psi \geq \frac{1}{2} \psi(\delta A), \quad (3.15)$$

где δ из $(0, 1)$ удовлетворяет условию (3.11).

Для $\forall h \in (0, \frac{2}{k}]$

$$\omega_k(f_A, h)_\psi \leq 2^{k-1} \omega_1(f_A, h)_\psi = 2^{k-1} \psi(2A) 2h. \quad (3.16)$$

Используя неравенства (3.15) и (3.16), для любых фиксированных n, k и $h > 0$ получаем

$$\begin{aligned} \sup_{f \in L_\psi, f \neq \text{const}} \frac{E_{n-1}(f)_\psi}{\omega_k(f, h)_\psi} &\geq \sup_{A > 0} \frac{E_{n-1}(f_A)_\psi}{\omega_k(f_A, h)_\psi} \geq \sup_{A > 0} \frac{\frac{1}{2} \psi(\delta A)}{\psi(2A) 2h} = \\ &= \frac{1}{2^{k+1} h} M_\psi \left(\frac{\delta}{2} \right). \end{aligned}$$

Так как $\gamma_\psi = 0$, то $M_\psi(t) = 1$, $0 < t \leq 1$. Следовательно

$$\sup_{f \in L_\psi, f \neq \text{const}} \frac{E_{n-1}(f)_\psi}{\omega_k(f, h)_\psi} \geq \frac{1}{2^{k+1} h}.$$

Поэтому при $n \rightarrow \infty$

$$\sup_{f \in L_\psi, f \neq \text{const}} \frac{E_{n-1}(f)_\psi}{\omega_k(f, \alpha_n)_\psi} \geq \frac{1}{2^{k+1} \alpha_n} \rightarrow \infty.$$

Автор благодарит С. А. Пичугова, под руководством которого выполнена эта работа.

Библиографические ссылки

1. Крейн С. Г. Интерполяция линейных операторов / С. Г. Крейн, Ю. И. Петунин, Е. М. Семёнов - М. : Наука. 1978. — 400 с.
2. Стороженко Э. А. Прямые и обратные теоремы типа Джексона в пространствах L_p , $0 < p < 1$ / Э. А. Стороженко, В. Г. Кротов, П. Освальд // Мат. сб. — 1975. — 98, № 3. — С. 395–415.
3. Иванов В. И. Прямые и обратные теоремы теории приближения в метрике L_p для $0 < p < 1$ / В. И. Иванов // Мат. заметки. — 1975. — 18, № 5. — С. 641–658.
4. Стороженко Э. А. Теорема Джексона в пространствах $L_p(R^k)$, $0 < p < 1$ / Э. А. Стороженко, П. Освальд // Докл. АН СССР, 1976. — Т. 229, № 3. — С. 554–557.
5. Стороженко Э. А. Теорема Джексона в пространствах $L_p(R^k)$, $0 < p < 1$ / Э. А. Стороженко, П. Освальд // Сиб. мат. журн., 1978. — Т. 19, № 4. — С. 888–901.
6. Пичугов С. А. О теореме Джексона для периодических функций в пространствах с интегральной метрикой / С. А. Пичугов // Укр. мат. журн., 2000. — Т. 52. — № 1. — С. 122–133.
7. Пичугов С. А. О теореме Джексона для непериодических функций в метрических пространствах с интегральной метрикой. II / С. А. Пичугов // Укр. мат. журн., 2011. — Т. 63. — № 11. — С. 1524–1533.
8. Стороженко Э. А. Приближения алгебраическими многочленами в L_p , $0 < p < 1$ / Э. А. Стороженко // Вестник МГУ, Серия: Математика. Механика 1978. — № 4. — С. 87–92.
9. Ходек Л. Б. О приближении функций алгебраическими многочленами в метрике L_p для $0 < p < 1$ / Л. Б. Ходек // Мат. заметки, 1981. — Т. 30, № 3. — С. 321–332.
10. Шведов А. С. Теорема Джексона в L_p , $0 < p < 1$, для алгебраических многочленов и порядки комонотонных приближений / А. С. Шведов // Мат. заметки. 1979. — Т. 25, № 1. — С. 107–117.
11. Runovski K. On Jackson's type inequalities in Orlicz classes / K. Runovski // Revista Mat. Comp., 2001. — 14, № 2. — С. 394–404.
12. Брудный Ю. А. Приближение функций алгебраическими многочленами / Ю. А. Брудный // Изв. АН СССР, серия матем., 1968. — 32, № 4. — С. 780–787.
13. Тиман А. Ф. Теория приближения функций действительного переменного / А. Ф. Тиман - М. : Физматгиз, 1960. — 624 с.

Надійшла до редколегії 22.04.2013