

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА МОДУЛЕЙ НЕПРЕРЫВНОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ.

Let $L_0(T)$ - the set of real-valued periodic measurable functions, $\Psi : R^+ \rightarrow R^+$ - the modulus of continuity,

$$L_\Psi \equiv L_\Psi(T) = \{f \in L_0(T) : \|f\|_\Psi := \frac{1}{2\pi} \int_T \Psi(|f(x)|)dx < \infty\}.$$

Investigate the properties of multiple modules of continuity of functions from L_Ψ .

Нехай $L_0(T)$ - множина дійснозначних періодичних вимірних функцій, $\Psi : R^+ \rightarrow R^+$ - модуль неперервності,

$$L_\Psi \equiv L_\Psi(T) = \{f \in L_0(T) : \|f\|_\Psi := \frac{1}{2\pi} \int_T \Psi(|f(x)|)dx < \infty\}.$$

Досліджуються властивості кратних модулів неперервності функцій з L_Ψ .

1. Введение. Пусть Ω - множество функций $\Psi : R_+^1 \rightarrow R_+^1$, являющихся функциями типа модуля непрерывности, $L_\Psi := L_\Psi[0, 2\pi]$ - метрические пространства измеримых 2π - периодических функций f таких, что

$$\rho(f, 0)_\Psi := \|f\|_\Psi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Psi(|f(x)|)dx < \infty.$$

Шкала пространств L_Ψ содержит, в частности, известные пространства $L_p := L_p[0, 2\pi], p \in (0, 1]$ (при $\Psi(t) = t^p$).

Пусть $\Delta_t f(x) = f(x+t) - f(x), \Delta_t^k = \Delta_t(\Delta_t^{k-1}), k \in N$,

$$\omega_k(f, h)_\Psi = \sup_{|t| \leq h} \|\Delta_t^k f\|_\Psi, h \geq 0 \quad (1)$$

- модуль непрерывности порядка k функции f в пространстве L_Ψ (в случае $k = 1$ вместо $\omega_1(f, h)_\Psi$ будем писать $\omega(f, h)_\Psi$).

Мы будем изучать обобщения на случай пространств L_Ψ следующих четырех свойств модулей непрерывности функций, которые ранее были доказаны для пространств $L_p, p \in (0, 1]$.

Для удобства изложения введем нумерацию этих свойств.

Свойство 1. (Изометрическое вложение в L_2)

Для каждого из пространств $L_p, 0 < p < 2$, существует отображение $A : L_p \rightarrow L_2$ такое, что :

а) $\forall f \in L_p$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |Af(x)|^2 dx; \quad (2)$$

б) $\forall f \in L_p, \forall h > 0$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\Delta_h f(x)|^p dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\Delta_h Af(x)|^2 dx; \quad (3)$$

Соотношение (2) доказано в [1], а (3) - в [2,3].

Свойство 2. Наряду с (1) рассмотрим еще следующие характеристики гладкости функций:

$$\Lambda_k(f, h)_\Psi = \frac{1}{h} \int_0^h \|\Delta_t^k f\|_\Psi dt,$$

$$\Omega_k(f, h)_\Psi = \frac{1}{h^k} \int_0^h \dots \int_0^h \|\Delta_{\vec{t}}^k f\|_\Psi dt_1 \dots dt_k,$$

где $\vec{t} = (t_1, \dots, t_k)$, $\Delta_{\vec{t}}^k = \Delta_{t_1} \circ \dots \circ \Delta_{t_k}$.

Для L_p пространств, $0 < p < 1$, связь этих характеристик исследовалась в [4], где была доказана их эквивалентность в том смысле, что для любого $k \in N$ и произвольного $h > 0$ справедливы неравенства

$$\omega_k(f, h)_p \leq C_1 \Omega_k(f, h)_p \leq C_2 \Lambda_k(f, h)_p \leq C_3 \omega_k(f, h)_p$$

с константами $C_i, i = 1, 2, 3$, не зависящими от f и h .

Свойство 3. Для всех $f \in L_p, 0 < p < 1$ и $k \in N$ справедливы неравенства ([4])

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|\Delta_h f\|_p dh \leq C_4(k, p) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|\Delta_h^k f\|_p dh.$$

Свойство 4. Пусть $0 < p < 1, k \in N$. Тогда (см. например [5], гл.12, §5) для всех $n \in N$

$$\omega_k(f, nh)_p \leq k^{1-p} n^{1+(k-1)p} \omega_k(f, h)_p.$$

2. Свойство 1. Изометрические вложения пространств L_Ψ в L_2 .

Пусть $\bar{\Omega}$ подмножество из Ω , состоящее из вогнутых функций Ψ .

Теорема 1. Пусть $\Psi \in \bar{\Omega}$, $\Psi(\infty) := \lim_{t \rightarrow \infty} \Psi(t) < \infty$, $g(t) := \Psi(\infty) - \Psi(t) \in L_2(0, \infty)$. Тогда существует отображение $A : L_\Psi \rightarrow L_2$ такое, что для любой $f \in L_\Psi$ и каждого $h > 0$

$$\|f\|_\Psi = \|Af\|_2^2, \quad (4)$$

$$\|\Delta_h f\|_\Psi = \|\Delta_h A f\|_2^2. \quad (5)$$

Доказательство. В работах [1-3] при построении изометрических вложений L_p в L_2 использовался аппарат интегральных преобразований. Мы следуем той же идее.

Для функции $g(t) \in L_2(0, \infty)$ пусть

$$\hat{g}(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty g(t) \cos(st) dt$$

- ее косинус-преобразование Фурье. По условию функция $g(t)$ на $[0, \infty]$ убывает и выпуклая, а значит $\hat{g}(s) \geq 0$. Далее

$$g(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \hat{g}(s) \cos(st) ds,$$

$$g(0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \hat{g}(s) ds = \Psi(\infty),$$

$$\Psi(t) = \Psi(\infty) - g(t) = g(0) - g(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \hat{g}(s)(1 - \cos(st)) ds = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \hat{g}(s)|e^{ist} - 1|^2 ds,$$

$$\Psi(|f(x)|) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \hat{g}(s)|e^{isf(x)} - 1|^2 ds = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \hat{g}(s)|F_f(s, x)|^2 ds, \quad (6)$$

где ограниченная функция $F_f(s, x) := e^{isf(x)} - 1$ при каждом фиксированном $s \in R_+$ является периодической функцией переменной x и принадлежит $L_2[0, 2\pi] \equiv L_2(x)$. Поэтому для ее разложения в ряд Фурье

$$F_f(s, x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(s) e^{ikx} \quad (7)$$

выполняется равенство Парсеваля

$$\|F_f(s, x)\|_{L_2(x)}^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(s)|^2.$$

Проинтегрируем (6) по переменной x и применим теоремы Фубини и Леви:

$$\begin{aligned} \|f\|_\Psi &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Psi(|f(x)|) dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \hat{g}(s)|F_f(s, x)|^2 ds dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \hat{g}(s) \|F_f(s, x)\|_{L_2(x)}^2 ds = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \hat{g}(s) \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(s)|^2 ds = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \hat{g}(s) |c_k(s)|^2 ds = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^2, \end{aligned}$$

где $a_k^2 := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \hat{g}(s) |c_k(s)|^2 ds$.

Определим искомое отображение A равенством

$$Af(x) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ikx},$$

тогда $\|f\|_\Psi = \|Af\|_2^2$.

Равенство (5) доказывается аналогично. Обозначим $\Delta_{h,x} F_f(s, x) = F_f(s, x+h) - F_f(s, x)$ приращение с шагом h функции $F_f(s, x)$ по переменной x . Тогда

$$|\Delta_{h,x} F_f(s, x)| = |e^{isf(x+h)} - e^{isf(x)}| = |e^{is\Delta_h f(x)} - 1| = |F_{\Delta_h f}(s, x)|,$$

поэтому (см. (6), (7))

$$\begin{aligned} \Psi(|\Delta_h f(x)|) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \hat{g}(s) |\Delta_{h,x} F_f(s, x)|^2 ds, \\ \|\Delta_h f\|_\Psi &:= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \hat{g}(s) \|\Delta_{h,x} F_f(s, x)\|_{L_2(x)}^2 ds = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \hat{g}(s) |c_k(s)|^2 ds 2(1 - \cos kh) = \|\Delta_h Af\|_2^2. \end{aligned}$$

Теорема 1 доказана.

Условия теоремы 1 выполняются, например, для функций $\Psi(t) = 1 - e^{-t}$, $\Psi(t) = \frac{t}{1+t}$, порождающих в соответствующих пространствах L_Ψ топологию сходимости по мере.

Если $\Psi(\infty) = \infty$, то используя срезку функции Ψ , мы можем доказать следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть $\Psi \in \bar{\Omega}$ и $\Psi(\infty) = \infty$. Тогда существует последовательность отображений $A_n : L_\Psi \rightarrow L_2, n \in N$, таких что для любой f из L_Ψ и всех $h > 0$

$$\begin{aligned}\|f\|_\Psi &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n f\|_2^2, \\ \|\Delta_h f\|_\Psi &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|\Delta_h A_n f\|_2^2.\end{aligned}\tag{8}$$

Доказательство. Для $n \in N$ положим

$$\Psi_{(n)}(t) = \min(\Psi(t); n), \quad |f_{(n)}(x)| = \min(|f(x)|; n), \quad g_n(t) = \Psi(n) - \Psi_{(n)}(t) = (\Psi(n) - \Psi(t))_+,$$

тогда

$$\begin{aligned}\hat{g}_n(s) &\geq 0, \\ \Psi_{(n)}(t) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \hat{g}_n(s)(1 - \cos st)ds, \\ \Psi_{(n)}(|f(x)|) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \hat{g}_n(s)|e^{isf(x)} - 1|^2 ds, \\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Psi_{(n)}(|f(x)|)dx &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \hat{g}_n(s)\|F_f(s, x)\|_{L_2(x)}^2 ds = \\ &= \sum_{k=-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \hat{g}_n(s)|c_k(s)|^2 ds.\end{aligned}\tag{9}$$

Определим отображение A_n равенством

$$A_n f(x) := \sum_{k=-\infty}^\infty \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \hat{g}_n(s)|c_k(s)|^2 ds \right)^{1/2} e^{ikx},$$

тогда из (9) следует, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Psi_{(n)}(|f(x)|)dx = \|A_n f(x)\|_2^2.$$

Осталось учесть, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f\|_{\Psi_{(n)}} = \|f\|_\Psi$.

Заметим, что если функция f существенно ограничена, то при $n_0 > \sup \text{vrai} |f(x)|$ $\Psi_{(n_0)}(|f(x)|) = \Psi(|f(x)|)$ почти всюду, и тогда

$$\|f\|_\Psi = \|A_{n_0} f\|_2^2.$$

Аналогично доказывается и соотношение (8).

Теорема 2 доказана.

3. Теорема 3 (Свойство 2). Пусть $\Psi \in \Omega, k \in N$. Тогда для всех $f \in L_\Psi$ и $h > 0$ справедливы неравенства

$$\omega_k(f, h)_\Psi \leq C_1 \Omega_k(f, h)_\Psi \leq C_2 \Lambda_k(f, h)_\Psi \leq C_3 \omega_k(f, h)_\Psi \tag{10}$$

с константами $C_i, i = 1, 2, 3$, не зависящими от f и h .

Доказательство. Третье неравенство в (10) очевидное. Доказательство второго неравенства в случае $L_\Psi = L_p, 0 < p < 1$ в [4] основано на алгебраических тождествах для суперпозиций приращений, фактически не использует специфических свойств L_p -метрики, и с очевидными изменениями остается верным для произвольных пространств L_Ψ .

Первое неравенство в (10) достаточно доказать при $k = 1$. Общий случай получим k -кратным применением полученного неравенства.

Заметим, что аналогичное неравенство справедливо в L_2 [6] :

$$\omega^2(f, h)_2 \leq C_4 \int_0^h \|\Delta_s f\|_2^2 ds. \quad (11)$$

Поэтому используем вложение L_Ψ в L_2 .

Пусть $\bar{\Psi}$ - наименьшая вогнутая мажоранта модуля непрерывности Ψ . Так как (см. например [7],гл 2,§1) $\Psi(x) \leq \bar{\Psi}(x) \leq 2\Psi(x)$, то $\|f\|_\Psi \leq \|f\|_{\bar{\Psi}} \leq 2\|f\|_\Psi$.

Пусть $t \in (0, h]$ и пусть, например, $\Psi(\infty) = \infty$. Тогда, используя теорему 2, (11), и теорему Лебега о предельном переходе, получим искомое неравенство:

$$\begin{aligned} \|\Delta_t f\|_\Psi &\leq \|\Delta_t f\|_{\bar{\Psi}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\Delta_t A_n f\|_2^2 \leq C_4 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{h} \int_0^h \|\Delta_s A_n f\|_2^2 ds = \\ &= C_4 \frac{1}{h} \int_0^h \lim_{n \rightarrow \infty} \|\Delta_s A_n f\|_2^2 ds = C_4 \frac{1}{h} \int_0^h \|\Delta_s f\|_{\bar{\Psi}}^2 ds \leq 2C_4 \frac{1}{h} \int_0^h \|\Delta_s f\|_\Psi^2 ds. \end{aligned}$$

Теорема 3 доказана.

4. Пусть для $\Psi \in \Omega$

$$M_\Psi(t) = \sup_{s>0} \frac{\Psi(st)}{\Psi(s)} \quad (12)$$

- ее функция растяжения([7],гл 2,§1).

Теорема 4. (Свойство 3). Пусть $k \in N$, функция Ψ из Ω такова, что $M_\Psi(\frac{1}{2^k}) < 1$. Тогда для любой $f \in L_\Psi$ выполняется неравенство

$$\int_0^{2\pi} \|\Delta_h^k f\|_\Psi dh \leq \frac{k^2}{1 - M_\Psi(\frac{1}{2^k})} \int_0^{2\pi} \|\Delta_h^{k+1} f\|_\Psi dh. \quad (13)$$

Для нормированных пространств $L_p, p \geq 1$, неравенство твкого типа доказано в [8]. Мы используем ту же идею доказательства, что в [8], а также неравенство $\Psi(st) \leq M_\Psi(t)\Psi(s)$, которое следует из определения (12).

Доказательство. Так как ([9],гл 3,§3)

$$\Delta_{2h}^k f(x) - 2^k \Delta_h^k f(x) = \sum_{l=1}^k C_k^l \sum_{m=0}^{l-1} \Delta_h^{k+1} f(x + mh),$$

то

$$\Delta_h^k f(x) = \frac{1}{2^k} \Delta_{2h}^k f(x) - \sum_{l=1}^k \frac{C_k^l}{2^k} \sum_{m=0}^{l-1} \Delta_h^{k+1} f(x + mh),$$

$$\Psi(|\Delta_h^k f(x)|) \leq M_\Psi\left(\frac{1}{2^k}\right) \Psi(|\Delta_{2h}^k f(x)|) + \sum_{l=1}^k M_\Psi\left(\frac{C_k^l}{2^k}\right) \sum_{m=0}^{l-1} \Psi(|\Delta_h^{k+1} f(x+mh)|),$$

$$\|\Delta_h^k f\|_\Psi \leq M_\Psi\left(\frac{1}{2^k}\right) \|\Delta_{2h}^k f\|_\Psi + \left(\sum_{l=1}^k l \cdot M_\Psi\left(\frac{C_k^l}{2^k}\right) \right) \|\Delta_h^{k+1} f\|_\Psi.$$

Так как $M_\Psi\left(\frac{C_k^l}{2^k}\right) \leq 1$, то

$$\|\Delta_h^k f\|_\Psi - M_\Psi\left(\frac{1}{2^k}\right) \|\Delta_{2h}^k f\|_\Psi \leq k^2 \|\Delta_h^{k+1} f\|_\Psi.$$

Отсюда следует (13). Теорема 4 доказана.

Следствие. Пусть $\Psi \in \Omega$, $M_\Psi\left(\frac{1}{2}\right) < 1$, $k = 2, 3, \dots$. Тогда для любой $f \in L_\Psi$

$$\int_0^{2\pi} \|\Delta_h f\|_\Psi dh \leq C(k) \int_0^{2\pi} \|\Delta_h^k f\|_\Psi dh.$$

5. Теорема 5 (свойство 4). Пусть $\Psi \in \Omega$, $k, n \in N$, $n \geq 2$. Тогда для любой $f \in L_\Psi$ и всех $h > 0$

$$\omega_k(f, nh)_\Psi \leq C(k)nM_\Psi(n^{k-1})\omega_k(f, h)_\Psi. \quad (14)$$

Доказательство. Так как ([9], гл 3, §3)

$$\Delta_{nh}^k f(x) = \sum_{\nu_1=0}^{n-1} \dots \sum_{\nu_k=0}^{n-1} \Delta_h^k f(x + (\nu_1 + \dots + \nu_k)h),$$

то

$$\Delta_{nh}^k f(x) = \sum_{s=0}^{(n-1)k} r_{k,n}(s) \Delta_h^k f(x + sh), \quad (15)$$

где $r_{k,n}(s)$ - число решений уравнения $\sum_{i=1}^k \nu_i = s$ при условии $\nu_i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$.

Заметим, что $\max\{r_{k,n}(s); s \leq (n-1)k\} = C_5(k)n^{k-1}$.

Из (15) следует, что

$$\begin{aligned} \frac{\|\Delta_{nh}^k f\|_\Psi}{\|\Delta_h^k f\|_\Psi} &\leq \sum_{s=0}^{(n-1)k} M_\Psi(r_{k,n}(s)) \leq \\ &\leq M_\Psi(C_5(k)n^{k-1}) \sum_{s=0}^{(n-1)k} M_\Psi\left(\frac{r_{k,n}(s)}{C_5(k)n^{k-1}}\right) \leq M_\Psi(C_5(k))M_\Psi(n^{k-1})(n-1)k \leq C(k)M_\Psi(n^{k-1})n. \end{aligned}$$

Мы использовали полумультимпликативность M_Ψ , и тот факт, что $M_\Psi(t) \leq 1$ при $t \leq 1$

Теорема 5 доказана.

Список литературы

- [1] *Schoenberg I.J.* The isometric imbedding of metric spaces into Hilbert space and positive definite functions. // American Mathematical Society. 1932.
- [2] *Конягин С.В.* О модулях непрерывности функций // Тезисы докладов Всесоюзной школы по теории функций. Кемерово, 1983. — С.59
- [3] *Черных Н.И.* Неравенство Джексона в $L_p[0, 2\pi]$ с точной константой // Труды МИАН СССР.—1992. — **198**.—С.232-241.
- [4] *Руновский К.В.* О приближении семействами линейных полиномиальных операторов в пространствах $L_p, 0 < p < 1$ // Матем. сборник.—1994. — **185**, 8—С. 81-102.
- [5] *De Vor R.A., Lorentz G.G.* Constructive approximation.- New York:Springer,1993.
- [6] *Руновский К.В.* Об одной оценке для интегрального модуля гладкости // Изв. вузов. Математика—1992. — 1 —С.78-80.
- [7] *Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семенов Е.М.* Интерполяция линейных операторов.— М.: Наука,1978. — 400 с.
- [8] *Стороженко Э.А.* Приближение функций интерполяционными в среднем сплайнами //Изв. вузов. Математика—1976. — 12.—С.82-95.
- [9] *Тиман А.Ф.* Теория приближений функций действительного переменного. М.: Физматгиз.1960. — 624 с.