

ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ ТОНКОСТЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ С УЧЁТОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ФОРМ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ (обзор исследований и некоторые результаты)

Аркадий Маневич, Сергей Ракша

Днепропетровский национальный университет

Днепропетровский государственный технический университет железнодорожного транспорта

1. Введение

Исследования по оптимальному проектированию тонкостенных конструкций – тонкостенных стержней, пластин и оболочек – по условиям устойчивости длительное время базировались на линейной теории устойчивости. С этим связаны важные особенности получаемых в расчётах оптимальных конфигураций. Для тонкостенных конструкций характерно наличие множества форм потери устойчивости (общих, местных). Зависимости критических нагрузок общих и местных форм от параметров конструкции, как правило, носят противоположный характер. Например, увеличение параметра тонкостенности (отношение некоторого характерного размера поперечного сечения к толщине) приводит к повышению критической нагрузки для общих форм и понижению – для местных). Отсюда следует, что для оптимальных конструкций критические напряжения для этих форм (некоторых из них) должны быть равны. Условие равноустойчивости (как и равнопрочности) широко использовалось при построении различных алгоритмов оптимизационных расчётов. Следует отметить, что вывод о равноустойчивости оптимальных конструкций основывается, по существу, на том, что в рамках линейной теории устойчивости все формы потери устойчивости независимы (ортогональны).

В 50– 60-е годы развитие теории устойчивости привело к созданию теории послекритического поведения конструкций (W. Koiter, J.M.T. Thompson, B. Budiansky, J.W. Hutchinson и др., см. обзор [2]). Эта теория позволила по-новому подойти к анализу чувствительности конструкций к несовершенствам. В частности, выяснилось, что чувствительность к несовершенствам для конструкций со множеством форм выпучивания существенно зависит от нелинейного взаимодействия этих форм (и именно этим объясняется особая чувствительность к несовершенствам цилиндрической оболочки при сжатии и сферической оболочки при внешнем давлении). Ясно, что этот вывод должен был изменить обычный подход к задачам оптимизации конструкций.

Впервые мысль о недостаточности линейной теории устойчивости (неизбежно приводящей к равноустойчивости) при решении задач оптимального проектирования была высказана В. Койтером и Склаудом в 1962 г. в ходе дискуссии на одной из конференций [1]. Опасность «наивного» подхода к проблеме оптимизации, основанного на условии равноустойчивости, подчёркивалась также в обзоре [2]. Но только в 70-е годы, когда начала развиваться теория связанного выпучивания (т.е. теория послекритического поведения конструкций с близкими критическими нагрузками для разных форм), вопрос о влиянии нелинейного взаимодействия форм на оптимальные параметры привлек внимание исследователей из разных стран, и эта догадка получила подтверждение.

В этой работе дан краткий обзор основных исследований по проблеме оптимального проектирования тонкостенных конструкций с учётом взаимодействия форм потери устойчивости, выполненных в 1970 - 2000-е годы, и приведены некоторые результаты исследований последних лет для сжатых тонкостенных стержней, продольно подкреплённых пластин и цилиндрических оболочек.

2. Исследования 70–80-х годов.

Первые исследования оптимальных параметров тонкостенных стержней с учётом связанного выпучивания были выполнены применительно к упрощённой модели стойки, предложенной А. Нейтом в 1969 г. для изучения взаимодействия общей потери устойчивости и местного выпучивания сжатых стержней коробчатого сечения (см. обзоры [2, 11, 12, 27]). Модель Нейта состоит из двух несущих полок, соединённых перегородками, обеспечивающими шарнирное опирание полок по продольным ненагруженным краям (но не имеющими собственной продольной жёсткости). Анализ местной потери устойчивости в такой модели существенно упрощается по сравнению с реальной стойкой, так как несущие полки рассматриваются как сжатые шарнирно опертые пластины, без учёта осложняющего задачу влияния боковых пластин.

После того, как закритическое поведение такой двухполочной модели стойки было изучено в ряде работ (А. Neut, 1969, 1970, W. Koiter, G.D.C. Kuiken, 1971), Томпсон и Льюис в 1972 г. [3] рассмотрели вопрос об её оптимальных параметрах, в предельно упрощённой постановке (квадратное поперечное сечение, заданы площадь поперечного сечения и длина стойки, местные несовершенства полок одинаковы, а общие несовершенства отсутствуют). Строились зависимости относительного предельного напряжения от параметра σ_E / σ_I , где σ_E, σ_I – критические напряжения для общей (эйлеровой) и местной (пластинчатой) форм выпучивания (этот параметр определяется относителем толщины (полок), при различных амплитудах местного несовершенства. С увеличением амплитуды несовершенства предельное напряжение быстро падало, по сравнению с линейным расчётом, и оптимум смещался от значения $\sigma_E / \sigma_I = 1$ в сторону меньших значений ($\sigma_E / \sigma_I < 1$). При этом оптимум оказывался очень плоским, поэтому это смещение повышало несущую способность незначительно.

Эти исследования были продолжены и обобщены в последующих работах [4, 6, 8, 9]. В работах [4, 6] были сделаны общие выводы о том, что оптимизация приводит к конструкциям повышенной чувствительности к несовершенствам, и что учёт нелинейного взаимодействия форм ведёт к сглаживанию («эрозии») оптимума. Гилберт и Калладин [8] рассмотрели ещё более простую модель, состоящую из двух жёстких стержней, соединённых короткой двухполочной стойкой Нейта, вводя как местные, так и общие несовершенства. Они показали, что можно ввести один обобщающий параметр несовершенства, и выполнили расчёты оптимальной конфигурации, подобные расчётам [3]. Макуа и Массоне [9] для сжатого тонкостенного стержня коробчатого сечения проанализировали различные теоретические подходы, которые учитывают, тем или иным способом, влияние местного выпучивания на общий изгиб и достижение предельного состояния – подходы Скеллауда, Клэппеля, Нейта, Грейвз-Смита, результаты расчётов по которым оказались достаточно близкими. Проведя численный эксперимент по программе Клэппеля, для квадратной пластины с заданной площадью и длиной, при варьировании ширины полки и амплитуды общего несовершенства, авторы пришли к выводу о том, что вследствие «сглаживания» оптимума смещение от точки оптимума оказывает незначительное влияние (но снижение предельной нагрузки по сравнению с линейным расчётом весьма значительно). Эта работа была продолжена в последующие годы [19, 20], и были получены аналогичные выводы.

В 1972 г. А.И. Маневич [5] рассмотрел задачу о связанной неустойчивости сжатой продольно подкреплённой панели. Для учёта взаимодействия общей формы выпучивания с местной формой выпучивания рёбер использовалась упрощённая модель соединения ребра с пластиной. Были сделаны качественные выводы о влиянии связанности форм на оптимальные параметры. Задача оптимизации сжатой продольно подкреплённой панели, но с учётом взаимодействия общей формы с местной формой выпучивания участка между рёбрами, была исследована Твергардом в 1973 г. [7]. Были учтены члены четвёртой степени в потенциальной энергии, и для решения задачи применен метод Бубнова–Галёркина. Оптимальные параметры определялись в простейшей постановке – расстояние между рёбрами фиксировалось, варьировался только один параметр жёсткости рёбер, но учитывались различные сочетания амплитуд общего и местного несовершенства. Так же, как в случае модели Нейта для стержня, оптимум при наличии несовершенств соответствовал

неравноустойчивой конструкции ($\sigma_E/\sigma_I < 1$), но наряду с этим оптимумом было отмечено повышение несущей способности в области больших σ_E/σ_I , превышающих 1 (однако решение Твергарда не позволило локализовать второй оптимум).

Исследования, начатые работой [5], были продолжены в последующие годы [10] и обобщены в монографии А.И. Маневича [12]. Наряду с задачей весовой оптимизации сжатой подкреплённой панели (типа широкой стойки) была впервые рассмотрена задача оптимизации сжатой продольно подкреплённой цилиндрической оболочки по условиям устойчивости с учётом связанности форм. Особенность этих исследований состояла в том, что учитывалось взаимодействие общей формы с местными формами выпучивания тонкостенных рёбер (а не участка пластины или оболочки между рёбрами). Однако использовалась упрощённая модель ребра: Ребро рассматривалось как стержень с упругим закреплением относительно обшивки, который может изгибаться и закручиваться без изменения контура поперечного сечения (т.е. изгиб при местном выпучивании считался сосредоточенным по линии контакта ребра с обшивкой). Эта модель позволяла обойти вычислительные трудности, связанные с пластинчатой схемой ребра и точным решением задачи устойчивости для местных форм. Задача оптимизации ставилась как задача нелинейного программирования, что дало возможность, при использовании достаточно эффективного метода условной минимизации, рассмотреть несколько варьируемых параметров (толщина оболочки, расстояние между рёбрами, размеры рёбер), а также учесть возможные геометрические ограничения. Выполненный численный эксперимент показал, что взаимодействие форм общей потери устойчивости и местного выпучивания рёбер приводит к более значительным поправкам в оптимальных параметрах, чем взаимовлияние общей формы и местного выпучивания участка между рёбрами. Для сжатой продольно подкреплённой панели оптимальное значение σ_L/σ_E составляло примерно 1,45–1,8 (в зависимости от величины начальной погиби), а повышение веса оптимальной панели по сравнению с линейным расчётом составляло 13–18 %. Для сжатой стрингерной оболочки влияние эффекта связанности форм на оптимальные параметры, при данных несовершенствах, зависело от относительной длины оболочки L/R и расположения продольных рёбер относительно обшивки (внутреннего или внешнего). Для оптимальной оболочки отношение σ_L/σ_E достигало двух и более, а повышение веса вследствие связанности форм составляло 15–20%.

Подводя итог исследованиям по оптимальному проектированию с учётом связанного выпучивания, выполненным в 70–80-е годы, отметим основные качественные выводы этих исследований: значительное снижение предельных нагрузок (при заданном весе) вследствие взаимодействия форм, сглаживание «нелинейного оптимума» по сравнению с линейным, неравноустойчивость оптимальных конструкций, более выраженный эффект взаимодействия общей формы с местной формой выпучивания тонкостенных рёбер в подкреплённых пластинах и оболочках (по сравнению с местной формой выпучивания участка между рёбрами). Однако эти работы, как правило, основывались на упрощённых моделях стержней, подкреплённых пластин и оболочек, и поэтому неудивительно, что полученные в них количественные результаты, в частности, относительно смещения оптимума от точки равноустойчивости, не всегда согласуются между собой.

Отметим, что обзоры работ 70–80-х годов по оптимальному проектированию с учётом связанного выпучивания можно также найти в работах [11–14].

3. Исследования 1990–2000-х годов.

В 80-е годы в теории связанного выпучивания тонкостенных конструкций был достигнут существенный прогресс. Были получены достаточно строгие решения задач о связанной неустойчивости для тонкостенных стержней, подкреплённых панелей и оболочек в рамках асимптотической теории Койтера ([15–17]; см. , также обзоры [26, 27]). Это позволило рассмотреть на новом этапе оптимизационные задачи для различных тонкостенных конструкций и получить решения, которые можно непосредственно приложить к реальным конструкциям.

Подкреплённые панели при сжатии

В работах [17, 18] исследовались задачи весовой оптимизации сжатых панелей, подкреплённых продольными рёбрами прямоугольного и таврового поперечного сечения. Анализ основывался на решениях нелинейной задачи связанной потери устойчивости в первом асимптотическом приближении, которые применимы для конструкций, достаточно близким к равноустойчивым (отличие критических напряжений не больше, чем примерно в два раза). Точность нелинейного решения прежде всего определяется точностью решения линейной задачи устойчивости (которое является первым этапом нелинейного решения). В отличие от работ 70-х годов, в [17, 18] использовались строгие решения линейной задачи устойчивости для системы обшивка-рёбра на основе пластинчатой схемы ребра, что дало возможность, в рамках единого алгоритма, описать все местные формы, включая местные формы с превалирующими перемещениями рёбер (это важно в случае тонкостенных рёбер). В связи с тем, что спектр коротковолновых местных форм достаточно густой (имеется много местных форм с близкими критическими напряжениями), в нелинейной задаче рассматривалось взаимодействие общей формы с каждой из местных форм в отдельности, в широком диапазоне чисел продольных полуволн $m=2-35$ (возможность такого раздельного рассмотрения взаимодействия общей формы с каждой из местных форм с некоторой эквивалентной погибью была доказана в [17]).

Задача оптимизации ставилась как задача нелинейного программирования. Постановка задачи оптимизации принималась обычной – заданы нагрузка T , длина L и характеристики материала (модуль E , коэффициент Пуассона ν , предел текучести σ_s); определяются толщина пластины h , ширина участка между рёбрами b , размеры стенки и полки ребра t_1, b_1, t_2, b_2 (для ребра таврового сечения). В отличие от «линейной оптимизации», в которой ограничения включают раздельные условия общей устойчивости и местной устойчивости, в «нелинейной оптимизации» ограничения ставятся для предельных напряжений связанного выпучивания. В качестве ограничений по прочности ставилось условие достижения максимальными напряжениями предела текучести материала, причём для несовершенной панели учитывались изгибные напряжения, обусловленные развитием общего и местного прогибов.

Для общности анализа все ограничения (по устойчивости, прочности, геометрические ограничения) формулировались в безразмерных параметрах. Безразмерные параметры нагрузки («индекс напряжённости» Шенли), веса и напряжений принимались в виде

$$T^* = \frac{T \cdot 10^6}{EL}, \quad G^* = \frac{h^0 \cdot 10^3}{L}, \quad \sigma^* = \frac{\sigma \cdot 10^3}{E} \quad (1)$$

где $h^0 = h + (t_1 b_1 + t_2 b_2) / b$ – приведенная (по весу) толщина. Поперечное сечение также характеризовалось безразмерными параметрами $h/b, t_1/b_1, t_2/b_2, b_2/b_1$.

Задача нелинейного программирования решалась линеаризованным методом приведенного градиента (ЛИПГ, [12]), который показал высокую эффективность и надёжность в многолетнем опыте его применения для решения различных задач. Для достижения оптимума требовалось, как правило, несколько десятков итераций при относительной погрешности определения оптимальных параметров порядка 0,001.

Для удобства анализа и сопоставления оптимальных панелей в различной постановке вначале определялась оптимальная совершенная панель (без несовершенств) при ограничениях только по устойчивости (т.е. предполагалось, что предел текучести настолько высок, чтобы не накладывать ограничения на напряжения, а геометрические ограничения на параметры, связанные с технологической осуществимостью проекта, отсутствуют). Такой оптимум (т.е. линейный оптимум по условиям устойчивости) назван абсолютным. Затем рассматривалась панель с несовершенствами при ограничениях только по устойчивости. На последнем этапе изучалось влияние ограничения по прочности и дополнительных геометрических ограничений, для совершенной и несовершенной панелей.

Характеристики «абсолютного оптимума» (а. о.) определяются одним ведущим параметром T^* . На основании расчётов для различных значений T^* в [18] получены зависимости безразмерных

оптимальных параметров а.о. от T^* во всём диапазоне T^* , представляющем интерес. Эти зависимости оказалось возможным с высокой точностью (погрешность порядка 1–4%) аппроксимировать степенными зависимостями вида

$$x = \alpha T^{*\beta} \quad (2)$$

Так, для параметров веса и напряжений получены следующие аппроксимации в случаях панелей с рёбрами прямоугольного и таврового профилей соответственно (погрешность менее 1%):

прямоугольное сечение: $G^* = 1,234T^{*0,494}$, $\sigma^* = 0,810T^{*0,506}$,

тавовое сечение: $G^* = 0,977T^{*0,499}$, $\sigma^* = 1,022T^{*0,501}$.

Для остальных геометрических параметров а.о. в табл. 1 приведены коэффициенты степенной аппроксимации (2) (для случая рёбер таврового сечения) и указаны погрешности этой аппроксимации. Эти данные позволяют легко определить все параметры при задании T^* и L .

Таблица 1. Коэффициенты степенной аппроксимации (2) для абсолютного оптимума (сжатые панели с рёбрами таврового сечения)

Параметр	α	β	Погрешность %
$(h/L) \cdot 10^3$	0,4481	0,5213	4,5
h/b	0,0155	0,2841	2,5
t_1/b_1	0,0160	0,2436	4,5
b_2/b_1	0,2640	0,2488	2,5
b/L	0,0293	0,2343	2,5

В нелинейной оптимизации при ограничениях по связанной неустойчивости оптимальные параметры зависят, кроме параметра T^* , от амплитуд начальных несовершенств по общей и местным формам ζ_1^* и ζ_2^* . Влияние взаимодействия форм на оптимальные параметры при различных уровнях несовершенств иллюстрирует табл. 2, в которой приведены характеристики оптимальных панелей при $T^*=20$ (случай нулевых погибей соответствует а.о.).

Таблица 2. Безразмерные параметры оптимальных сжатых панелей с рёбрами таврового профиля

Амплитуды погибей (ζ_1^* , ζ_2^*)	G^*	$\frac{h}{b}$	$\frac{b}{L}$	$\frac{t_1}{b_1}$	$\frac{t_2}{t_1}$	$\frac{b_2}{b_1}$
(0; 0)	4,382	0,0356	0,0589	0,0348	0,912	0,543
(0,5; 0)	4,693	0,0325	0,0622	0,0387	0,883	0,682
(0,5; 0,1)	5,035	0,0357	0,0571	0,0429	0,972	0,628

При наличии относительно небольших общих и местных погибей взаимодействие форм приводит к заметному повышению веса (порядка 10%) и изменению остальных параметров оптимальных панелей. Возрастают относительная ширина полки, толщина стенки.

В отличие от панелей абсолютного оптимума, для которых характерна равноустойчивость по трём формам выпучивания – общей и двум местным (одна из которых, с числом полуволн по длине $m=2$ или 3, соответствует крутильному выпучиванию ребра, а другая, $m=17-23$, – местному выпучиванию обшивки между рёбрами и стенки ребра), оптимальная несовершенная панель не

является равноустойчивой по общей и местным формам, но отмечается «равноустойчивость» по различным связанным формам. Предельные напряжения несовершенной панели с погибью (0,5; 0) на 5–12 % ниже критических напряжений абсолютного оптимума. В то же время для равноустойчивой панели при этих погибях предельные напряжения на 20% ниже критических (в линейном расчёте). Следовательно, смещение от точки равноустойчивости позволяет примерно вдвое снизить отрицательный эффект взаимодействия форм.

Расчёты показали, что предельная нагрузка оптимальной несовершенной панели достигается при общих прогибах порядка (1–2) h , когда изгибные напряжения в рёбрах достаточно велики. Поэтому реальная постановка задачи оптимизации должна включать ограничение по прочности (полному напряжению). В работе приведены результаты решения для различных значений безразмерного предела текучести $\sigma_s^* = \sigma_s \cdot 10^3 / E$. Роль ограничения по прочности существенно возрастает при больших значениях параметра T^* ($T^* > 6-10$). Начиная с некоторого значения T^* предельные напряжения практически перестают зависеть от T^* . Так, при $\sigma_s^* = 3,5$ и погибях (0,5; 0,1) средние (безразмерные) напряжения в оптимальной панели не удаётся поднять выше 2,5.

В работе приведены также результаты расчётов с учётом геометрического ограничения (на минимальную толщину), сопоставлены данные, полученные с использованием пластинчатой модели ребра и схемы тонкостенного стержня, и оценена погрешность этой схемы.

Продольно подкреплённые цилиндрические оболочки при сжатии

В работах [19, 22] исследована задача весовой оптимизации сжатой продольно подкреплённой цилиндрической оболочки, на основе асимптотического решения в первом нелинейном приближении для связанного выпучивания. Задача оптимизации ставится аналогично [18]. Заданными считаются радиус R , длина L и осевая сжимающая сила T . Варьируемые параметры - толщина обшивки h , расстояние между рёбрами b , толщина и высота ребра t_1, b_1 (для ребра прямоугольного сечения).

Для расчёта общей устойчивости в линейной задаче применялась конструктивно-ортотропная теория; для расчёта местной устойчивости - точное решение линейной задачи для системы обшивка-ребро с пластинчатой схемой ребра (полученное в [15]). Безразмерные параметры веса, нагрузки и напряжений вводились в виде:

$$G^* = \frac{h}{R} 10^3, T^* = \frac{T 10^6}{2\pi E R^2}, \sigma^* = \frac{\sigma}{E} 10^3 \quad (3)$$

В отличие от задачи оптимизации панели, безразмерные оптимальные параметры оболочки зависят не только от параметра T^* , но и от параметра L/R , а также от расположения рёбер относительно обшивки - внутреннего или внешнего. Использование эффективного метода нелинейного программирования ЛМПП позволило, аналогично [18], получить решение во всём диапазоне параметров T^* и L/R , представляющем практический интерес.

Получены оптимальные параметры совершенной оболочки при ограничениях только по устойчивости («абсолютный оптимум»). Значения безразмерных оптимальных параметров хорошо аппроксимируются степенными зависимостями вида

$$x = \alpha T^{*\beta} (L/R)^{\gamma} \quad (4)$$

Коэффициенты α, β и γ для различных параметров, приведенные в табл. 3 позволяют легко определить все размеры оболочки абсолютного оптимума для заданных значений L, R, T (в первых строках даны значения для внешних стрингеров, во вторых - для внутренних). Преимущество в весе оболочки с внешним расположением рёбер по сравнению с внутренним возрастает с увеличением L/R и составляет примерно 17–20%.

Таблица 3. Коэффициенты степенной аппроксимации (4)

Параметр	α	β	γ	Погрешность, %
G^*	0,9349 1,2100	0,5073 0,4969	0,4037 0,4871	0,6
h/b	0,0132 0,0116	0,2541 0,2495	-0,2089 -0,2787	0,6
$(h/R) 10^3$	0,3535 0,5084	0,5407 0,4929	0,4530 0,4687	5
t_1/b_1	0,0470 0,0407	0,2457 0,2709	-0,2031 -0,2573	0,5
b/R	0,0269 0,0441	0,2850 0,2422	0,6552 0,7520	4,5
b_1/R	0,0182 0,0271	0,2636 0,2419	0,6163 0,7402	1
$(h+b_1)/R$	0,0184 0,0274	0,2747 0,2513	0,6089 0,7301	0,8

В нелинейной оптимизации полученные результаты не являются столь же общими, поскольку возрастает число определяющих параметров. В табл. 4 дано сравнение оптимальных параметров, полученных в линейной и нелинейной оптимизации, для оболочек с внешними рёбрами при трёх значениях L/R для амплитуд общей и местной погиби (отнесенных к толщине оболочки), равных 0,25 (в первых столбцах даны значения для линейного оптимума, во вторых – для нелинейного).

Таблица 4. Безразмерные оптимальные параметры цилиндрических оболочек с внешними продольными рёбрами

Параметр	$L/R=0,5$		$L/R=0,75$		$L/R=1,0$	
	линейный оптимум	нелинейн. оптимум	линейный оптимум	нелинейн. оптимум	линейный оптимум	нелинейн. оптимум
G^*	3,2421	3,6110	3,8064	4,1610	4,2654	4,6336
h/b	0,0324	0,0260	0,0300	0,0282	0,0282	0,0264
t_1/b_1	0,1129	0,1370	0,1042	0,1311	0,0980	0,1266
$t_1 b_1 / h b$	1,4776	1,9010	1,3868	2,0236	1,4545	1,7913

В зависимости от амплитуд несовершенств вес оболочки нелинейного оптимума на 5–10% выше, чем линейного. Преимущество в весе оболочек с внешними стрингерами по сравнению с внутренними сохраняется и в нелинейной постановке, но несколько уменьшается по сравнению с линейной оптимизацией. Интересно, что вес оболочки в нелинейной оптимизации оказывается достаточно близким к полученному в приближённом линейном решении [12]. Это можно объяснить тем, что погрешности, связанные с учётом упругого закрепления элементов оболочки при местном выпучивании, с одной стороны, и учётом эффекта нелинейного взаимодействия форм, с другой, частично погашают влияние друг друга.

В работах [19, 22] были выполнены также расчёты с учётом геометрических ограничений – на минимальную толщину и на максимальную полную толщину (с учётом рёбер). Расчёты показали, что эти ограничения приводят к значительному изменению оптимальных параметров и, в частности, заметному увеличению веса оболочек. Проявляется тенденция к сближению линейного и нелинейного оптимумов, особенно при ограничении по полной толщине, но всё же различия, как правило, остаются существенными.

Тонкостенные стержни открытого поперечного сечения при сжатии

Задача весовой оптимизации сжатых тонкостенных стержней с учётом связанности форм выпучивания исследовалась в работах [24, 25] применительно к стержням открытого профиля типа швеллера и швеллера с отгибами (на краях полок). Формулировка проблемы оптимизации была аналогичной изложенной выше для подкреплённой панели. Основное отличие состоит в необходимости учёта изгибно-крутильной формы потери устойчивости (в рамках теории В.З. Власова). Решения получены на основе линейной теории устойчивости и нелинейной теории связанного выпучивания. Предельные напряжения связанного выпучивания рассчитывались в рамках асимптотической теории Койтера в первом приближении

Длина стержня L , сила P , характеристики материала и относительные амплитуды несовершенств считались заданными. Толщина профиля t , ширина стенки, полки и отгибов b_1, b_2, b_3 – переменные параметры проектирования (толщина всех элементов принимается постоянной, что соответствует холодно-формованным профилям). Безразмерные параметры нагрузки, веса и напряжений принимались в виде

$$P^* = \frac{P}{L^2 \cdot E} 10^6, \quad G^* = \frac{A}{L^2} 10^3, \quad \sigma^* = \frac{\sigma}{E} 10^3. \quad (5)$$

Отличия между линейным и нелинейным оптимумами иллюстрирует табл. 5, в которой приведены параметры оптимальных профилей швеллера и швеллера с отгибами при $P^* = 0.5$ и $P^* = 1.5$, для стержня длиной $L=1$ м (линейный оптимум соответствует нулевым несовершенствам)..

Таблица 5. Оптимальные профили, полученные в линейной и нелинейной оптимизации ($L=1$ м)

P^*	Амплитуды несовершенств	Размеры швеллера (мм)			Размеры швеллера с отгибами (мм)			
		b_1	b_2	t	b_1	b_2	b_3	t
0,5	(0; 0)	94,5	41,5	2,0	66,3	32,0	27,7	1,4
0,5	(0,5; 0)	79,0	39,7	2,4	65,2	36,1	26,1	1,4
1,5	(0; 0)	117,7	51,7	3,1	83,0	39,8	34,2	2,2
1,5	(0,5; 0)	96,2	50,0	3,8	80,5	43,7	32,1	2,3

Профили линейного оптимума имеют почти постоянные значения отношения ширины полки к ширине стенки во всем диапазоне P^* . Для швеллера $b_2/b_1=0.439-0.44$; для швеллера с отгибами $b_2/b_1=0.48-0.484$, $b_3/b_1=0.41-0.42$. При нелинейной оптимизации соотношения ширин элементов и относительная толщина зависят от амплитуд несовершенств (см. табл.6). Учет взаимодействия форм при оптимизации приводит к заметному уменьшению ширины стенки b_1 и увеличению толщины t .

Таблица 6. Оптимальные параметры швеллера и швеллера с отгибами при $P^*=1$ для различных комбинаций общих и местных несовершенств

Несовершенства	Оптимальные безразмерные параметры						
	Швеллер			Швеллер с отгибами			
	b_1/L	b_2/b_1	t/b_1	b_1/L	b_2/b_1	b_3/b_1	t/b_1
(0; 0)	0.109	0.439	0.024	0.093	0.48	0.413	0.024
(0,5; 0)	0.099	0.484	0.029	0.076	0.509	0.409	0.024
(0,5; 0,1)	0.089	0.512	0.036	0.074	0.578	0.400	0.025

Зависимости параметра веса G^* от параметра нагрузки P^* представлены на рис. 1 для линейного (амплитуды несовершенств (0; 0)) и нелинейного оптимума (несовершенства (0,5; 0) для швеллера и швеллера с отгибами. При учете взаимодействия форм вес оптимального профиля

увеличивается на 5-10 %. Вес оптимального швеллера с отгибами примерно на 40% меньше веса стержня швеллерного профиля.

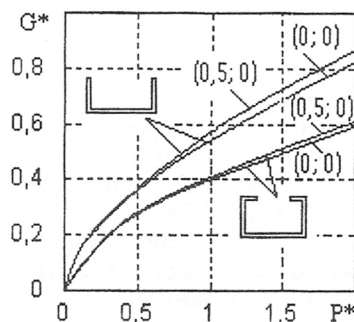


Рис. 1. Зависимость параметра веса G^* от параметра нагрузки P^* для двух типов профилей

Расчёт связанной потери устойчивости стержней, полученных в линейной оптимизации, показал, что взаимодействие мод снижает их предельные напряжения на 20-22% для швеллера и 12-13% для швеллера с отгибами. После оптимизации стержня с учетом связанного выпучивания этот эффект уменьшается до 5-8% для тех же несовершенств. Таким образом, изменения в оптимальной конфигурации, полученные в нелинейной оптимизации, уменьшают опасный эффект взаимодействия мод в два раза и более.

Литература

- [1]. Koiter W.T., Skaloud M. Mem. Soc. R. Sci., Liege, 5^{me} series, tome 8, Fascicule 5, 1962.
- [2]. Hutchinson J.W., Koiter W.T. Postbuckling theory. Appl. Mech. Reviews, 1970, 23, N 12, 1353-1366
- [3]. Thompson J.M.T., Lewis G.M. On the optimum design of thin-walled compression members. J. Mech. Phys. Solids, 1972, v. 20, N 2, pp. 101-109.
- [4]. Thompson J. M. T. Optimization as a generator of structural instability. Int. J. Mech. Sci., 1972, v.14, N 9, pp. 627-629.
- [5]. Маневич А.И. О некоторых вопросах устойчивости составных тонкостенных конструкций при конечных перемещениях. Тез докл. на 4-й Всесоюз. конф. по проблемам устойчивости в строит. механике. Харьков, 1972, М.: ВНИПИ Теплопроект, 1972, с. 45-46.
- [6]. Thompson J. M. T., Supple W. J. Erosion of optimum designs by compound branching phenomena. J. Mech. Phys. Solids, 1973, v. 21, N 3, pp. 135-144.
- [7]. Tvergaard V. Influence of post-buckling behaviour on optimum design of stiffened panels. Int. J. Solids and Structures, 1973, v. 9, pp. 1519-1534.
- [8]. Gilbert R.B., Calladin C.R. Interaction between the effects of local and overall imperfections in the buckling of elastic columns. J. Mech. Phys. Solids, 1974, v. 22, pp. 519-540.
- [9]. Maquoi R., Massonet Ch. Interaction between local plate buckling and overall buckling in thin-walled compression members - theory and experiments. Buckling of Structures (Proc. of IUTAM Symposium, Cambridge, 1974), Springer-Verlag, 1976, pp. 365-382.
- [10]. Маневич А.И. Оптимальное проектирование подкреплённых пластин и оболочек при учёте связанных форм потери устойчивости. Тез докл. на XI Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин. Харьков, 1977. - С. 55.
- [11]. Tvergaard V. Buckling behaviour of plate and shell structures. In: Theoretical and Applied Mechanics (ed. W.T. Koiter). North-Holland Publ. Comp., 1977.
- [12]. Маневич А.И. Устойчивость и оптимальное проектирование подкреплённых оболочек. Киев-Донецк, «Вища школа», 1979, 152 с.

- [13]. Теребушко О.И. Устойчивость и оптимальное проектирование пластин, подкреплённых рёбрами. Прикл. механика, 1982, т. 18, №6, с. 69-74.
- [14]. Życzkowski M., Gajewski A. Optimal structural design with stability constraints. In: COLLAPSE. The buckling of structures in theory and practice. Ed. J.M.T. Thompson, G.W. Hunt. Cambridge Univ. Press, 1983.
- [15]. Маневич А.И. Потеря устойчивости сжатых продольно подкреплённых цилиндрических оболочек при конечных перемещениях с учётом локального выпучивания рёбер-пластин. Изв. АН СССР. Механика твёрдого тела, 1983, №2, с. 136-145.
- [16]. Маневич А.И. Устойчивость оболочек и пластин с рёбрами таврового профиля. Строит. механика и расчёт сооружений, 1985, №2, с.34-38.
- [17]. Маневич А.И. Нелинейная теория устойчивости подкреплённых пластин и оболочек с учётом взаимодействия форм выпучивания. Диссертация на соиск. уч. степени доктора техн. наук. Днепропетровск, Днепроп. химико-технолог. ин-т, 1989.
- [18]. Маневич А.И. Весовая оптимизация продольно сжатой панели с рёбрами таврового профиля. Прикладная механика, 1990, т. 26, № 2, с. 82-88.
- [19]. Маневич А.И. Оптимизация сжатой продольно подкреплённой цилиндрической оболочки на основе линейной и нелинейной теорий устойчивости. Строит. механика и расчёт сооружений, 1990, №3, с. 57-62.
- [20]. Rondal Jacques. On the optimal design of thin-walled compressed members. Stab. Steel Struct., Int. Conf. (Budapest, Apr. 25-27. 1990), V. 1, Budapest, 1991, p. 1133-1137, 253-257.
- [21]. Рондал Дж., Макуа Р. Об оптимальном проектировании полых сжатых элементов квадратного поперечного сечения. Потеря устойчивости и выпучивание конструкций: теория и практика. Под ред Дж. Томпсона и Г. Ханта: Пер. с англ. М.: Наука, Гл. ред физ.-мат. лит. 1991, с. 263 - 271.
- [22]. Manevich A.I. Structural Optimization of Stiffened Cylindrical Shells with Allowing for Nonlinear Interaction of Buckling Modes. Proc. of the 26th Israel Conference on Mechanical Engineering (Technion City, Haifa, Israel, May 1996). Haifa, 1996.
- [23]. Manevich A.I. Influence of geometrical constraints associated with manufacturing upon optimal parameters of stiffened plates and shells under compression. WCSMO-2 Structural and Multidisciplinary optimization. Ed. W. Gutkowski, Z. Mroz. V.2., IFTR, Warsaw, Poland. 1997.- P. 847- 852.
- [24]. Manevich A. I., Raksha S.V. The optimum design of compressed thin-walled columns of open cross-section. IX Symposium Statecznosci Konstrukcji (Zakopane, 2000), p. 189-196
- [25]. Маневич А.И., Ракша С.В. Оптимальное проектирование сжатых тонкостенных профилей с учётом нелинейного взаимодействия форм потери устойчивости. Известия вузов. Строительство и архитектура, №6, 2001. С.15-21.
- [26]. Manevich A.I. Coupled instability of cylindrical shells stiffened with thin ribs. Thin-Walled Structures. Advances and Developments (Proc. of the Third Internat. Confer. on Thin-Walled Structures). Ed. By J. Zaras, K. Kowal-Michalska, J. Rhodes. Elsevier, 2001, pp. 683-691.
- [27]. Маневич А.И., Ракша С.В. Связанная потеря устойчивости тонкостенных стержней (идеи, методы и некоторые результаты исследований). Theoretical Foundations of Civil Engineering-X. Vol. 2. Ed. By W. Szczesniak, OK PW. Warsaw, 2002, pp. 764-774.

STRUCTURAL OPTIMIZATION OF THIN-WALLED STRUCTURES WITH ACCOUNT OF MODE INTERACTION (review of investigations and some results)

Arkadiy Manevich, Sergey Raksha

A brief review of investigations on optimal design of compressed thin-walled bars, stiffened plates and shells with account of mode interaction carried out in 1970-2000-s, and some results of recent investigations are presented. Main attention is paid to peculiarities of optimal projects in comparison with those obtained on the base of the linear theory of stability.