МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ДНІПРОПЕТРОВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ЗАЛІЗНИЧНОГО ТРАНСПОРТУ
ІМЕНІ АКАДЕМІКА В. ЛАЗАРЯНА

Д. М. КОЗАЧЕНКО,
Р. В. ВЕРНИГОРА, В. В. МАЛАШКІН

Основи дослідження операцій у транспортних системах: приклади та задачі

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК ДЛЯ ВНЗ

ДНІПРОПЕТРОВСЬК
2015

УДК 519.8:656.2(075.8)
ББК 22.18+39.28
К 59

Рецензенти:
д-р техн. наук, проф. *Є. В. Нагорний* (ХНАДУ),
д-р техн. наук, проф. *О. В. Лаврухін* (УДУЗТ),
д-р техн. наук, проф. *І. В. Жуковицький* (ДНУЗТ ім. акад. В. Лазаряна)

Рекомендовано до друку
вченою радою Дніпропетровського національного університету
залізничного транспорту імені академіка В. Лазаряна
як навчальний посібник (*протокол № 5 від 21.12.2015*).
Зареєстровано НМВ університету (*реєстр № 259/16-3 від 22.04.2016*)

Козаченко, Д. М.
К 59 Основи дослідження операцій у транспортних системах: приклади та задачі [Текст]: навчальний посібник для ВНЗ / Д. М. Козаченко, Р. В. Вернигора, В. В. Малашкін; Дніпропетр. нац. ун-т залізн. трансп. ім. акад. В. Лазаряна. – Дніпропетровськ, 2015. – 277 с.
ISBN 978-966-8471-69-8

У навчальному посібнику викладено теоретичні відомості щодо побудови математичних моделей та розв'язання найбільш поширених оптимізаційних задач, спрямованих на удосконалення транспортних процесів. Для розв'язання задач використовуються сучасні математичні методи дослідження операцій: лінійне програмування, динамічне програмування, сітьове планування та управління, теорія масового обслуговування, імітаційне моделювання. Викладення матеріалу супроводжується відповідними прикладами.

Посібник призначений для студентів вищих навчальних закладів спеціальності 275 «Транспортні технології» при вивченні дисципліни «Дослідження операцій у транспортних системах».

Іл. 139. Табл. 79. Бібліогр.: 21 назва.

УДК 519.8:656.2(075.8)
ББК 22.18+39.28

ISBN 978-966-8471-69-8

ЗМІСТ

ВСТУП 6

ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТА ВИЗНАЧЕННЯ.
МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ОПЕРАЦІЇ 9

1.1. Основні поняття дослідження операцій 9
1.2. Математична модель операції 11
1.3. Загальна постановка задачі дослідження операцій 14

ЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ 18

2.1. Поняття лінійного програмування 18
2.2. Постановка основної задачі лінійного програмування та основні визначення 19
2.3. Геометрична інтерпретація ОЗЛП. Порядок розв’язання ОЗЛП графічним методом 21

СИМПЛЕКС-МЕТОД РОЗВ’ЯЗАННЯ ЗАДАЧ
ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ 33

3.1. Загальний принцип симплекс-методу 33
3.2. Розв’язання ОЗЛП симплекс-методом у табличній формі 36
   3.2.1. Табличний алгоритм симплекс-методу 36
   3.2.2. Алгоритм заміни змінних у симплекс-таблиці 38

ЛІНІЙНЕ ЦІЛОЧИСЛОВЕ ПРОГРАМУВАННЯ 45

4.1. Постановка задачі лінійного цілочислового програмування 45
4.2. Метод січних площин Гоморі для розв’язання задач лінійного цілочислового програмування 46
   4.2.1. Загальний принцип методу Гоморі 46
   4.2.2. Алгоритм побудови додаткових обмежень 47

ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ 56

5.1. Постановка транспортної задачі 56
5.2. Розв’язання транспортної задачі табличним способом 58
5.3. Транспортна задача з проміжними пунктами 71

5.4. Розв’язання транспортної задачі за критерієм часу 77
5.5. Транспортна задача на мережі 81

РОЗПОДІЛЬНА ЗАДАЧА ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ 111
6.1. Постановка розподільної задачі 111
6.2. Порядок розв’язання розподільної задачі 113

ЗАДАЧА ПРО МАКСИМАЛЬНИЙ ПОТІК НА ТРАНСПОРТНІЙ МЕРЕЖІ 128
7.1. Постановка задачі про максимальний потік 128
7.2. Розв’язання задачі про максимальний потік у матричній формі 130
7.3. Розв’язання задачі про максимальний потік на мережі 135

ЗАДАЧА ПРО ПРИЗНАЧЕННЯ 142
8.1. Постановка задачі про призначення 142
8.2. Розв’язання задачі про призначення методом Мака 143
8.3. Розв’язання задачі про призначення Угорським методом 150

ЗАДАЧА КОМІВОЯЖЕРА 160
9.1. Постановка задачі комівояжера 160
9.2. Метод «гілок та меж» для задачі комівояжера 162

ДИНАМІЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ 176
10.1. Постановка задачі динамічного програмування 176
10.2. Розв’язання задачі динамічного програмування 178

СІТЬОВЕ ПЛАНУВАННЯ ТА УПРАВЛІННЯ 192
11.1. Поняття сітьового планування 192
11.2. Основні визначення 194
11.3. Порядок побудови сітьового графіка 196
11.4. Розрахунок параметрів сітьового графіку 197
11.5. Оптимізація сітьових графіків 203

ІМІТАЦІЙНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТРАНСПОРТНИХ СИСТЕМ 213
12.1. Імітаційне моделювання як інструмент дослідження складних систем 213
12.2. Основні принципи моделювання випадкових подій та величин 217
12.3. Моделювання роботи приймально-відправного парку як одноканальної системи масового обслуговування 227
12.4. Приклади розв’язання задач імітаційного моделювання при дослідженні транспортних процесів 240
12.4.1. Моделювання маси вагонів 240
12.4.2. Моделювання маси контейнерів 241
12.4.3. Моделювання порядку розташування вагонів 243
12.4.4. Моделювання штрафу за безквитковий проїзд 244
12.4.5. Моделювання роботи контейнерного майданчика 249
12.4.6. Моделювання руху поїзда по перегону 250

12.4.7. Моделювання закріплення состава на станційних коліях 252
12.4.8. Моделювання розформування та накопичення составів 254

БІБІЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК 264

ДОДАТОК А 266

ВСТУП

Дослідження операцій – це мистецтво
давати погані відповіді на ті
практичні питання, на які інші
методи дають ще гірші відповіді.
Т. Сааті

Транспортна галузь є своєрідною «кровоносною системою» економіки будь-якої держави, забезпечуючи її функціонування та сталий розвиток. Ефективна та надійна робота транспортної системи неможлива без використання сучасних підходів та технологій управління, завдяки яким обираються найбільш раціональні та економічно обґрунтовані рішення на етапах як проектування виробничих потужностей та інфраструктури, так і їх експлуатації. Однак для ефективного управління складними системами, якими, безперечно, є і транспортні системи, сучасному керівнику далеко не завжди буває достатньо власного досвіду, інтуїції та організаторських здібностей. Формуючи як стратегічні, так і оперативні рішення, керівник має враховувати численні, часто взаємно протилежні, вимоги та критерії щодо ефективності шляхів досягнення поставлених цілей, і визначити найбільш ефективний (оптимальний) шлях розв'язання поставленої задачі часто неможливе без застосування наукових підходів та математичних розрахунків. Так, на транспорті розв'язання таких задач, як організація вантажних та пасажирських перевезень, розробка графіків та маршрутів руху транспортних об'єктів, раціональний розподіл наявних транспортних засобів між відправниками вантажів, планування роботи навантажувально-розвантажувальних механізмів на вантажних пунктах, розробка проектів з підвищення пропускної здатності об'єктів транспортної інфраструктури, технічне нормування роботи транспортних підрозділів тощо неможливе без наукового обґрунтування економічної доцільності прийнятих рішень.

Саме потреби виробництва в найкращому (оптимальному) управлінні складними цілеспрямованими процесами створили передумови для виникнення спеціальних наукових методів, які об'єднали під назвою **дослідження операцій (ДО)**. Методи дослідження операцій покликані забезпечувати кількісне обґрунтування рішень в усіх сферах цілеспрямованої людської діяльності [1].

Дослідження операцій як наука має суто прикладний характер та спрямована насамперед на розв'язання практичних задач. Сьогодні для розв'язання широкого кола прикладних задач у багатьох галузях людської діяльності, у т. ч. у галузі транспорту, у ДО широко використовується сучасний математичний апарат – теорія ймовірностей та математична статистика, теорія масового обслуговування, лінійне та нелінійне програмування, теорія ігор та статистичних рішень, теорія графів, системний аналіз, імітаційне моделювання, сітьове планування та управління тощо.

Слід наголосити, що власне прийняття рішення щодо організації того чи іншого комплексу заходів виходить за межі дослідження операцій та належить до компетенції відповідальних осіб, яким надане право остаточного вибору. При цьому вони можуть враховувати, поряд з рекомендаціями математичних методів, також і інші фактори, що з різних причин не були взяті до уваги в розрахунках. Таким чином, у підсумку остаточне рішення завжди приймається людиною, а завдання дослідження операцій – підготувати кількісні дані та рекомендації, які полегшують обґрунтування прийняття того чи іншого рішення.

Разом з основною – обґрунтування оптимальних рішень – у дослідженні операцій вирішуються й інші важливі прикладні задачі [1]:

– порівняльна оцінка різних варіантів організації операції;

– оцінка впливу на результат операції різних варіантів її організації;

– дослідження функціонування систем у різних експлуатаційних умовах.

Основне призначення цього посібника – допомогти майбутнім фахівцям з транспортних технологій оволодіти основними сучасними математичними методами оптимізації та пошуку раціональних рішень, а також застосовувати здобуті знання на практиці для підвищення ефективності функціонування транспортних систем. Безумовно, опис усіх задач, що виникають на транспорті й можуть бути розв'язані методами ДО, неможливий у межах однієї книги. Тому в цьому навчальному посібнику розглянуто лише найбільш поширені задачі, що повсякчас виникають у ході експлуатації транспортних систем, а також основні методи дослідження операцій для розв'язання цих задач. При цьому як транспортні системи автори посібника розглядають такі інфраструктурні об'єкти, як транспортні мережі автомобільних та залізничних шляхів, транспортні вузли, залізничні ділянки, залізничні станції, вантажні пункти, порти, локомотивні депо, пункти організації взаємодії різних видів транспорту тощо.

Слід зазначити, що кожен з наведених у посібнику методів ДО розглянуто на простих та наочних прикладах з числовим розв'язанням відповідної задачі. Для самостійної перевірки рівня засвоєння матеріалу в кінці кожного розділу наведено відповідні запитання та приклади задач.

Навчальний посібник призначений для студентів вищих навчальних закладів спеціальності 275 «Транспортні технології» (спеціалізації «Організація перевезень і управління на залізничному транспорті» та «Організація перевезень і управління на автомобільному транспорті») при вивченні дисципліни «Дослідження операцій у транспортних системах», а також при виконанні дипломних проектів та магістерських робіт.

РОЗДІЛ 1

Основні поняття та визначення. Математична модель операції

1.1. Основні поняття дослідження операцій

Операція – будь-який керований захід (система заходів), що об’єднаний єдиним задумом і спрямований на досягнення певної мети.

Прикладами операцій при організації роботи транспортних систем можуть бути:

– визначення найбільш раціональних параметрів транспортних систем;

– розподіл рухомого складу (вагонів, автомобілів) між вантажними пунктами;

– складання плану перевезень вантажів між відправниками та отримувачами;

– визначення раціональних маршрутів руху транспортних одиниць;

– розробка контактних графіків взаємодії різних видів транспорту в портах чи логістичних центрах;

– розподіл навантажувально-розвантажувальних механізмів між вантажними фронтами;

– визначення раціональних режимів руху поїздів на ділянках;

– визначення етапності заходів зі збільшення пропускної та переробної здатності технічних засобів (залізничних ліній, портів, станцій, вантажних пунктів);

– вибір місця спорудження нових транспортних об’єктів (логістичних центрів, локомотивних депо);

– визначення раціональних схем пасажирських составів;

– планування системи пасажирських перевезень у містах;

– аналіз та удосконалення технологічних процесів роботи транспортних підрозділів.

У ДО операція завжди є керованим заходом, тобто існує можливість тим чи іншим способом обрати певні керовані параметри, що характеризують спосіб її (операції) організації. Інакше кажучи, результат виконання операції залежить від рішення щодо вибору її керованих параметрів. Таким чином, у ДО під *рішенням* розуміють деякий набір керованих параметрів операції, що визначають спосіб її організації.

Безумовно, плануючи організацію операції (приймаючи рішення), у першу чергу намагаються зробити її більш ефективною. Під *ефективністю операції* розуміють ступінь її пристосованості до виконання поставленої задачі. Для того щоб оцінити ефективність кожного рішення та порівнювати результати їх реалізації, необхідно мати певний числовий критерій оцінки (показник ефективності).

Критерій ефективності – кількісний (інколи якісний) показник W, що характеризує ступінь досягнення поставленої мети при певній організації операції, тобто при реалізації певного рішення. У ДО критерій ефективності називають *цільовою функцією*. Часто вибір критерію ефективності являє собою досить складне завдання. Обраний критерій ефективності повинен відповідати таким вимогам [2]:

– показовість, тобто здатність відображати реальну мету операції;
– чутливість, тобто здатність змінюватися зі зміною значень параметрів операції;
– простота визначення й розуміння для дослідника;
– інтегральність, тобто об’єднання по можливості всіх основних елементів операції.

Конкретний вигляд показника ефективності W залежить від специфіки задачі, яка розв’язується. Як критерій W можуть прийматись економічні показники (витрати на реалізацію операції або прибуток від її виконання), часові показники (тривалість виконання операції), показники, що характеризують продуктивність праці (кількість виробленої продукції), різні фізичні величини (довжина маршруту, швидкість руху, об’єм або площа приміщень тощо), статистичні показники (ймовірність події, математичне сподівання або середнє значення певного показника) та ін. Правильний вибір показника ефективності – необхідна умова для успішного розв’язання поставленої задачі дослідження операцій.

Наступна, не менш важлива умова успішного розв’язання оптимізаційної задачі, – якомога повніше врахування дослідником реальних умов виконання операції, тобто під час розв'язання оптимізаційної задачі необхідно враховувати існуючі обмеження, що певним чином впливають як на саму операцію, так і на процес пошуку рішення щодо її ефективної організації. Тому оптимізаційні задачі в дослідженні операцій завжди розв'язуються в певній *системі обмежень*.

Очевидно, що залежно від прийнятої системи організації операції (прийнятого рішення) може бути досягнуто певне значення критерію ефективності. Завдання ж методів дослідження операцій – отримання оптимального рішення. Під *оптимальним рішенням* розуміють набір параметрів операції, які забезпечують максимум (мінімум) критерію ефективності при заданій системі обмежень. У дослідженні операцій можливі дві форми постановки задачі знаходження оптимального рішення:

– досягнення заданого ефекту за мінімальних витрат ресурсів;

– досягнення максимального ефекту за фіксованих витрат ресурсів.

Класична постановка задачі ДО передбачає максимізацію критерію ефективності W при пошуку оптимального рішення: $W \to \max$. Якщо ж необхідно забезпечити мінімум критерію ($W \to \min$), оптимізаційна задача легко зводиться до класичної задачі максимізації, якщо змінити знак цільової функції: $-W \to \max$.

1.2. Математична модель операції

При пошуку оптимального рішення щодо організації операції можна досліджувати як саму операцію (реальний процес, об'єкт), так і її модель. У більшості випадків виконання досліджень на реальних об'єктах не є можливим. У цьому зв'язку виникає проблема розробки адекватної (достовірної) моделі реального процесу (операції). У дослідженні операцій метод дослідження математичних моделей є основним. При побудові математичної моделі реальний об'єкт, процес або явище (у нашому випадку – операція) певним чином спрощується та систематизується, виявляються найбільш важливі фактори та встановлюється характери їх впливу на процес; після цього отримана система описується за допомогою того чи іншого математичного апарату. Типову математичну модель дослідження операцій можна описати так: *максимізація (або мінімізація) цільової функції за умови дотримання системи обмежень* [3]. Під час дослідження математичних моделей у ДО використовується операційний метод, суть якого така [2]:

– постановка задачі – формулювання умов та вибір критерію оцінки;

– побудова математичної моделі операції (формалізація задачі) та перевірка її адекватності;

– знаходження оптимального рішення за допомогою моделі;

– оцінка отриманого рішення та коригування моделі.

При постановці задачі необхідно чітко сформулювати мету дослідження та встановити існуючу систему обмежень операції.

Формалізація передбачає представлення вербального (словесного) запису задачі у вигляді системи аналітичних (математичних) виразів. Така система, власне, і являє собою математичну модель. Побудова моделі операції є, з одного боку, складним, а з іншого – відповідальним завданням. Загальних способів побудови моделей не існує. У кожному конкретному випадку модель будується, виходячи з фізичного змісту задачі з урахуванням цільової спрямованості дослідження та здорового глузду.

Вимоги до моделі досить суперечливі. З одного боку, модель повинна бути досить повною, тобто в ній необхідно врахувати всі важливі фактори, які суттєво впливають на результат операції. З іншого боку, модель повинна бути досить простою, щоб можна було встановити явні (бажано аналітичні) залежності між її параметрами. У дослідженні операцій розрізняють аналітичні та статистичні моделі.

Для *аналітичних моделей* характерно встановлення формульних (аналітичних) залежностей між параметрами задач, що записані у вигляді алгебраїчних, диференціальних рівнянь або нерівностей. Недоліком таких моделей є певні спрощення та припущення під час їх побудови, а також їх досить значна складність за необхідності врахування великої кількості факторів при дослідженні складних процесів та систем.

Статистичні моделі, що базуються на методах математичної статистики, теорії ймовірностей та імітаційного моделювання, дозволяють врахувати значну кількість факторів, а також випадковість процесу, що досліджується. Такі моделі ніби відтворюють реальний процес функціонування операції. У більшості випадків статистичне моделювання виконується на ЕОМ, оскільки при цьому необхідне багаторазове повторення процедури моделювання за різних значень випадкових факторів. Недоліком статистичних моделей є те, що отримані результати значно гірше піддаються аналізу та осмисленню, що ускладнює встановлення взаємозв'язків між факторами операції.

Найкращі ж результати отримують за умови спільного використання аналітичних та статистичних моделей: за допомогою простої аналітичної моделі можна отримати попередні наближені результати та розібратись в основних закономірностях досліджуваного процесу, а з використанням статистичної (імітаційної) моделі можна більш точно дослідити перебіг процесу та визначити його поведінку в різних експлуатаційних умовах.

Побудована математична модель має бути адекватною, тобто з достатньою для умов дослідження точністю відповідати реальному процесу чи об'єкту. З цією метою виконується перевірка адекватності моделі за допомогою одного з існуючих математичних методів. Часто під час перевірки адекватності моделей виконується статистичне порівняння результатів, отриманих за допомогою моделі та на реальному об'єкті за одних і тих самих вихідних даних (експлуатаційних умов).

Після побудови математичної моделі та перевірки її адекватності розв'язок поставленої задачі знаходять одним з методів дослідження операцій, серед яких лінійне та нелінійне програмування, динамічне програмування, теорія ігор та статистичних рішень, сітьове планування та управління, теорія графів, теорія масового обслуговування, імітаційне моделювання тощо. Основні та найбільш поширені методи ДО розглянуто в цьому посібнику.

Отримане рішення аналізується з позиції як здорового глузду, так і можливості його реалізації на практиці. У випадку отримання некоректного розв'язку, необхідно внести відповідні поправки в математичну модель та/або застосувати інший математичний метод розв'язання задачі.

1.3. Загальна постановка задачі дослідження операцій

Нехай є певна операція O, тобто керований процес, на результат якого можна впливати, вибираючи тим чи іншим способом керовані параметри операції. Ефективність операції визначається певним числовим критерієм W, який необхідно максимізувати (мінімізувати). Розглянемо найпростіший випадок, коли всі фактори, від яких залежить результат операції, діляться на дві групи:

– задані, тобто заздалегідь відомі фактори (умови виконання операції), на які впливати неможливо: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$;

– залежні, тобто керовані, фактори (елементи розв'язку), значення яких можна вибирати в певних межах: $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

Цей випадок, коли фактори, що впливають на хід операції, або заздалегідь відомі, або залежать від способу керування операцією, називається *детермінованим*. Слід зазначити, що під заданими умовами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ та елементами розв'язку $x_1, x_2, \ldots, x_m$ можна розуміти не тільки звичайні числа, але й функції, наприклад обмеження, що накладаються на елементи рішення.

Показник ефективності операції у детермінованому випадку можна записати як $W = F\left(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, x_1, x_2, \ldots, x_m\right)$. При цьому задача дослідження операцій математично формулюється таким чином [1, 2]: *при заданих умовах-обмеженнях* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ *необхідно знайти такі елементи рішення* $x_1, x_2, \ldots, x_m$, *за яких показник ефективності W досягає екстремуму (максимуму або мінімуму)*.

У більшості випадків цю задачу можна розв'язати відомими методами.

Однак детермінований випадок не так часто трапляється в реальному житті. Більш типова ситуація, коли не всі умови виконання операції заздалегідь відомі, тобто наявний *недетермінований випадок*, а ефективність операції залежить уже від трьох категорій факторів:

– задані, тобто заздалегідь відомі фактори (умови виконання операції), на які впливати неможливо: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$;

– невідомі умови або фактори $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$;

– залежні, тобто керовані, фактори (елементи розв'язку), значення яких можна вибирати в певних межах: $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

Тоді критерій ефективності можна записати як $W = F\left(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, Y_1, Y_2, \ldots, Y_k, x_1, x_2, \ldots, x_m\right)$, а задача дослідження операцій у цьому випадку формулюється таким чином [1, 2]: *при заданих умовах-обмеженнях $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, з урахуванням невідомих факторів $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$ необхідно знайти такі елементи $x_1, x_2, \ldots, x_m$, за яких показник ефективності W досягає екстремуму (максимуму або мінімуму)*.

Задача ДО в наведеній постановці може розв'зуватися:

– з урахуванням відомих (заданих) законів розподілу випадкових величин $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$, коли випадкові значення замінюються їх статистичними оцінками (зазвичай, математичними сподіваннями), і задача зводиться до детермінованого випадку;

– за допомогою так званої «оптимізації у середньому», коли операція виконується декілька разів при різних значеннях факторів $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$. При цьому вибирається той розв'язок ($x_1, x_2, \ldots, x_m$), при якому операція у середньому буде найбільш ефективною.

Найскладнішим є випадок, коли невідомі фактори $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$ неможливо дослідити та описати відомими статистичними методами. У такій ситуації рекомендується розглянути весь діапазон можливих значень $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$ та визначити ефективність операції в кожному з діапазонів невідомих умов. При цьому за результатами виконаних розрахунків доцільно надавати не одне підсумкове рішення, а виділити область можливих прийнятних рішень, на основі якої здійснюють остаточний вибір.

У ході розв'язання практичних задач досить часто трапляється ситуація, коли ефективність операції необхідно оцінювати не за одним, а за декількома показниками (критеріями) $W_1, W_2, \ldots, W_k$. При цьому деякі показники необхідно максимізувати, а інші, навпаки, – мінімізувати. Наприклад, необхідно за якомога коротший термін (критерій W_1) перевезти максимальну кількість вантажу (W_2), використавши мінімальну кількість рухомого складу (W_3).

Слід також зазначити, що в більшості випадків критерії ефективності в багатокритеріальних оптимізаційних задачах несумісні один з одним, і рішення, яке призводить до максимізації одного показника, не призводить до мінімізації чи максимізації інших показників. При цьому цілком можлива ситуація, коли взагалі не існує рішення, яке б одночасно приводило до необхідного екстремуму всі критерії ефективності.

У випадку багатокритеріальної задачі можливі ефективні рішення можуть бути визначені на основі методів векторної оптимізації (рішення за Парето) [4], що дозволяє відкинути неконкурентоспроможні (за всіма критеріями) варіанти й суттєво зменшити область пошуку найбільш ефективного рішення.

Іншим напрямком розв'язання багатокритеріальних задач є штучне об'єднання декількох показників в один інтегральний критерій [1, 5]. Такий критерій може мати вигляд дробу, де в чисельнику ставлять ті показники, які необхідно збільшити, а в знаменнику – ті, які необхідно зменшити. Інегральний критерій також може бути представлений у вигляді суми показників, взятих з певними коефіцієнтами (вагами, що визначають значущість показника); при цьому додатні коефіцієнти при показниках означають, що їх значення необхідно збільшити, а від'ємні коефіцієнти означають, що значення відповідних показників необхідно зменшити. Загальним недоліком таких інтегральних критеріїв є те, що ефективність одного показника можна компенсувати за рахунок іншого (наприклад, невелику кількість виробленої продукції можна компенсувати за рахунок незначних витрат на її виробництво).

Контрольні запитання та завдання

1. Основне завдання методів дослідження операцій.
2. Дати визначення поняття «операція».
3. Приклади операцій при організації роботи транспортних систем.
4. Що розуміють під поняттям «рішення» у дослідженні операцій?
5. Що розуміють під ефективністю операції?
6. Що таке критерій ефективності у дослідженні операцій? Які вимоги висувають до критерію ефективності?
7. Поясніть поняття «система обмежень» у дослідженні операцій. Наведіть приклади.
8. Що розуміють під «оптимальним рішенням» у дослідженні операцій?

9. Наведіть дві форми постановки задачі дослідження операцій.
10. Загальний порядок дослідження математичних моделей.
11. Що являє собою формалізація задачі?
12. Що таке математична модель процесу або операції?
13. Які типи моделей розрізняють у дослідженні операцій?
14. Які основні риси аналітичних моделей у дослідженні операцій? Переваги та недоліки аналітичних моделей.
15. Які основні риси статистичних моделей у дослідженні операцій? Переваги та недоліки статистичних моделей.
16. Що таке адекватність моделі? Як перевірити адекватність моделі?
17. Сформулюйте основну задачу дослідження операцій для детермінованого випадку.
18. Сформулюйте основну задачу дослідження операцій для недетермінованого випадку.
19. Принципи вирішення багатокритеріальних оптимізаційних задач.
20. Які практичні задачі можна розв'язувати на залізничному транспорті методами дослідження операцій?

РОЗДІЛ 2

Лінійне програмування

2.1. Поняття лінійного програмування

Математичне програмування – це галузь математики, що розробляє теорію та числові методи розв'язання багатовимірних екстремальних задач з обмеженнями, що задані у формі рівнянь або нерівностей. У багатьох галузях практики виникають своєрідні оптимізаційні задачі, для яких характерні такі риси:

– показник ефективності W являє собою лінійну функцію C від елементів рішення $x_1, x_2, \dots, x_n$;

– обмежувальні умови $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, що накладаються на можливі рішення, мають вигляд лінійних рівнянь або нерівностей.

Задача полягає в тому, щоб знайти такі значення параметрів x_j при заданих умовах α_i, за яких забезпечується екстремальне значення критерію W (цільової функції C). Такі задачі називають *задачами лінійного програмування*. Лінійне програмування є одним із найбільш досліджених та розроблених розділів математичного програмування, який застосовують під час розв'язання оптимізаційних задач при знаходженні максимального (мінімального) значення цільової функції в певній області, що визначається заданими обмеженнями.

На транспорті до задач лінійного програмування належать:

– розподіл транспортних засобів по вантажних фронтах під розвантаження чи навантаження;

– розподіл порожніх навантажувальних ресурсів (вагонів або автомобілів) на транспортній мережі;

– планування перевезень між відправниками та отримувачами;

– закріплення локомотивних бригад за поїздами;

– планування завантаження транспортних одиниць;

– вибір зонних станцій при плануванні приміських перевезень.

2.2. Постановка основної задачі лінійного програмування та основні визначення

Сформулюємо основну задачу лінійного програмування (ОЗЛП) [1]. Припустимо, що є n змінних $x_1, x_2, \dots, x_n$. При цьому всі вони невід'ємні, тобто $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$. Також є m умов-обмежень, які подані у формі m рівнянь:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots\dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{2.1}$$

Тобто обмеження задачі задані у вигляді рівнянь $\sum a_{ij}x_j = b_i$.

Критерій ефективності задано у вигляді цільової функції:

$$C = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \to \min.$$

Умова задачі: *знайти такі невід'ємні значення змінних* $x_1, x_2, \dots, x_n$*, які задовольняють систему рівнянь (2.1) і за яких цільова функція досягає мінімуму*.

Нагадаємо, якщо за умовами задачі необхідно максимізувати цільову функцію, то треба змінити знак функції C і далі розглядати функцію C', тобто якщо $C \to \max$, то

$$C' = -C = -c_1x_1 - c_2x_2 - \dots - c_nx_n \to \min.$$

Допустимий розв'язок ОЗЛП – це деяка сукупність невід'ємних значень $x_1, x_2, \dots, x_n$, які задовольняють систему рівнянь-обмежень (2.1).

Оптимальний розв'язок ОЗЛП – це такий розв'язок з допустимих, за якого цільова функція C перетворюється в мінімум.

Слід зазначити, що ОЗЛП може не мати розв'язку в таких випадках:

– якщо система (2.1) несумісна, тобто її рівняння-обмеження суперечать одне одному;

– якщо існує розв’язок системи (2.1), але при цьому серед отриманої сукупності $x_1, x_2, \ldots, x_n$ є від’ємні значення;

– якщо є допустимі розв’язки, але цільова функція не обмежена знизу (немає оптимального розв’язку), тобто цільову функцію можна покращувати (мінімізувати) нескінченно.

Окремим випадком ОЗЛП є ситуація, коли кількість *n* змінних дорівнює кількості *m* незалежних рівнянь; у цьому випадку, якщо розв’язок задачі (системи рівнянь-обмежень) існує, то він буде єдиним і оптимальним.

Основним же є випадок, коли кількість *n* змінних більше кількості *m* рівнянь-обмежень. Як відомо з алгебри, з *m* рівнянь можна знайти значення тільки *m* змінних; ці змінні в лінійному програмуванні називають *базисними*, а решту *n–m* змінних називають *вільними*. Розподіл змінних на вільні й базисні довільний.

Якщо вільним змінним x_j присвоїти деякі довільні значення (наприклад, нульові), то решту – базисні змінні y_i – можна однозначно визначити з *m* рівнянь: $y_i = \sum_{j=1}^{n-m} a_{ij} x_j + b_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$. Очевидно, що така система рівнянь має безліч розв’язків; при цьому розв’язання ОЗЛП зводиться до знаходження таких значень вільних змінних x_j, за яких умови рівнянь-обмежень (2.1) є дотриманими, а цільова функція *C* досягає мінімуму. Для розв’язання цієї задачі використовується математичний апарат лінійного програмування.

Звичайно, може виникнути питання, а чи потрібен спеціальний математичний апарат для розв’язання задач лінійного програмування, адже для пошуку екстремуму в математичному аналізі прийнято просто продиференціювати цільову функцію *C* за аргументами $x_1, x_2, \ldots, x_n$, а потім, прирівнявши частинні похідні до нуля, розв’язати отриману систему рівнянь. Однак виявляється, у випадку задачі лінійного програмування знайти розв’язок таким чином неможливо. Оскільки функція *C* лінійна, то частинні похідні за усіма її аргументами постійні й на нуль не перетворюються. Як буде показано нижче, екстремум цільової функції *C* (якщо він взагалі існує) завжди досягається на границі можливих значень $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Математичний апарат лінійного програмування дозволяє послідовно з найменшими витратами дослідити границі можливих розв'язків і знайти на них той розв'язок, який буде оптимальним, тобто таку сукупність значень $x_1, x_2, \ldots, x_n$, при якій лінійна цільова функція C досягає екстремуму (максимуму або мінімуму).

У деяких задачах лінійного програмування обмеження задані системою лінійних нерівностей. У цьому випадку, потрібно систему нерівностей замінити системою рівнянь, тобто привести до ОЗЛП. Заміна нерівностей на рівняння виконується за допомогою введення додаткових змінних y_i ($y_i \geq 0$):

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b_i \text{ замінюється на } \sum_{j=1}^{n} a_j x_j + y = b_i, \ (i = 1, 2, \ldots, m),$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \geq b_i \text{ замінюється на } \sum_{j=1}^{n} a_j x_j - y = b_i, \ (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Отримані рівняння зводяться до вигляду:

$$y_i = \sum_{j=1}^{n-m} a_{ij} x_{ij} + b_i, \ (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{2.2}$$

Наприклад,

$$5x_1 + 6x_2 - 4x_3 \leq 3 \ \rightarrow \ 5x_1 + 6x_2 - 4x_3 + y_1 = 3 \ \rightarrow \ y_1 = 3 - 5x_1 - 6x_2 + 4x_3$$

$$5x_1 + 6x_2 - 4x_3 \geq 3 \ \rightarrow \ 5x_1 + 6x_2 - 4x_3 - y_1 = 3 \ \rightarrow \ y_1 = 5x_1 + 6x_2 - 4x_3 - 3.$$

2.3. Геометрична інтерпретація ОЗЛП. Порядок розв'язання ОЗЛП графічним методом

Якщо після приведення задачі лінійного програмування до системи рівнянь-обмежень кількість вільних змінних $n–m = 2$, то в цьому випадку задача лінійного програмування може бути розв'язана графічно в такому порядку [1, 5, 6].

1. У системі рівнянь-обмежень необхідно обрати дві вільні змінні (наприклад, x_1 та x_2) та виразити всі інші (базисні змінні) через вільні.

2. На координатній площині побудувати область допустимих розв'язків (ОДР); при цьому одній з вільних змінних поставити у відповідність вісь абсцис, а іншій – вісь ординат.

3. Прирівняти кожне рівняння (базисну змінну) до нуля ($y_i = 0$) та за двома точками побудувати відповідну пряму на координатній площині.

4. Для кожного рівняння (прямої) визначити півплощину, де відповідна базисна змінна набуває додатних значень ($y_i > 0$). Визначити знак півплощини можна, якщо підставити координати будь-якої її точки (наприклад, точки початку координат) до рівняння відповідної прямої $y_i = 0$.

5. На основі отриманих півплощин, які відповідають рівнянням-обмеженням ($y_i = 0$), побудувати ОДР, що являє собою багатокутник, усередині та на границях якого лежить множина допустимих розв'язків, а за його межами хоча б одна базисна змінна набуває від'ємних значень.

6. Нехай цільова функція задана виразом $C = c_1x_1 + c_2x_2 + c_0$. Тоді напрям її зростання (градієнт) збігається з напрямком вектора, що побудований з початку координат в точку з координатами (c_1, c_2). Максимум цільової функції досягається в тій вершині ОДР, яка є найвіддаленішою в напрямку градієнта, а мінімум – у вершині границі ОДР, яка є найвіддаленішою в протилежному напрямку.

7. Координати вказаної (екстремальної) вершини ОДР визначають значення вільних змінних при оптимальному розв'язанні задачі. Для знаходження цих значень необхідно розв'язати систему рівнянь ($y_i = 0$), що відповідають прямим, на перетині яких розташована екстремальна точка. Підставивши отримані значення вільних змінних у рівняння-обмеження, знайти значення всіх базисних змінних, а також оптимальне значення цільової функції.

Наведений алгоритм графічного розв'язання задачі лінійного програмування розглянемо на прикладі.

Умова задачі. На станції необхідно вивантажити маршрут однорідного вантажу з $M = 80$ вагонів на трьох вантажних фронтах місткістю відповідно

$m_1 = 36$, $m_2 = 28$ та $m_3 = 40$ вагонів. Подає, розставляє і збирає вагони один локомотив, який працює $T = 23$ години на добу. Витрати локомотиво-годин маневрової роботи в розрахунку на один вагон різні для кожного вантажного фронту і складають відповідно $t_1 = 0,2$, $t_2 = 0,4$ і $t_3 = 0,3$ локомотиво-год/ваг. За вивантаження вагонів станція збирає з клієнтів певну плату. Через різне технічне обладнання вантажних фронтів прибуток від вивантаження на них різний і складає відповідно $c_1 = 30$, $c_2 = 50$ та $c_3 = 20$ грн/ваг. Необхідно розподілити вагони маршруту по вантажних фронтах таким чином, щоб вони були вивантажені протягом доби, а загальний прибуток від вивантаження був максимальним.

Розв'язання. Побудуємо математичну модель задачі. Позначимо як x_1, x_2, x_3 кількість вагонів, які розвантажуються відповідно на першому, другому та третьому вантажних фронтах. Тоді цільова функція матиме такий вигляд: $C = 30x_1 + 50x_2 + 20x_3$.

Формалізуємо обмеження задачі:

– щодо загальної кількості вагонів, які розвантажуються: $x_1 + x_2 + x_3 = 80$;

– щодо добового ресурсу локомотиво-годин: $0,2x_1 + 0,4x_2 + 0,3x_3 \le 23$;

– щодо місткості вантажних фронтів: $x_1 \le 36$; $x_2 \le 28$; $x_3 \le 40$.

Таким чином, математична модель задачі матиме такий вигляд:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 80, \\ 0,2x_1 + 0,4x_2 + 0,3x_3 \le 23, \\ x_1 \le 36, \\ x_2 \le 28, \\ x_3 \le 40, \end{cases}$$

$$C = 30x_1 + 50x_2 + 20x_3 \to \max .$$

Уведемо додаткові змінні y_1 (резерв часу локомотива), y_2, y_3, y_4 (відповідно, резерви місткості 1-го, 2-го та 3-го вантажних фронтів), щоб перетворити нерівності на рівняння:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 80, \\ 0,2x_1 + 0,4x_2 + 0,3x_3 + y_1 = 23, \\ x_1 + y_2 = 36, \\ x_2 + y_3 = 28, \\ x_3 + y_4 = 40. \end{cases}$$

Отримана система обмежень має 7 змінних та 5 рівнянь. Таким чином базисних змінних – 5, вільних $7-5=2$. Нехай вільними змінними будуть x_1 та x_2. Виразимо базисні змінні та цільову функцію через вільні змінні x_1 та x_2.

$$\begin{cases} x_3 = 80 - x_1 - x_2, \\ y_1 = -1 + 0{,}1x_1 - 0{,}1x_2, \\ y_2 = 36 - x_1, \\ y_3 = 28 - x_2, \\ y_4 = -40 + x_1 + x_2, \end{cases} \tag{2.3}$$

$$C = 1\,600 + 10x_1 + 30x_2 \to \max.$$

Оскільки маємо дві вільні змінні, то задача може бути розв'язана графічно. Побудуємо область допустимих розв'язків. Поставимо у відповідність вільній змінній змінні x_1 вісь абсцис, а змінній x_2 – вісь ординат (рис. 2.1). Прирівняємо кожне рівняння-обмеження до нуля і побудуємо на координатній площині графіки відповідних прямих.

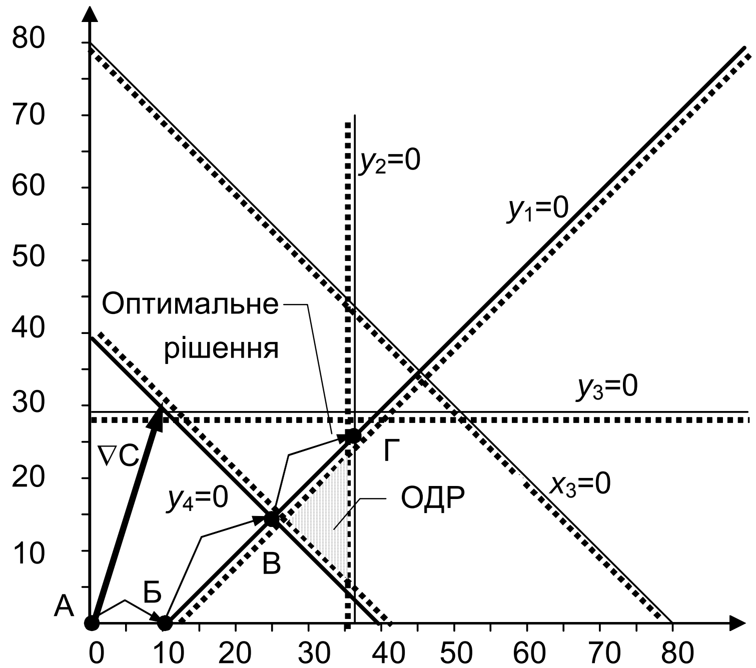


Рис. 2.1. Графічний розв'язок задачі розподілу вагонів

Розглянемо порядок побудови прямої, що відповідає першому рівнянню-обмеженню. Нехай $x_3 = 0$, тоді $80 - x_1 - x_2 = 0$. Щоб побудувати графік цієї прямої, необхідно знайти координати двох точок, які їй належать: наприклад, якщо $x_1 = 0$, то $x_2 = 80$; якщо $x_2 = 0$, то $x_1 = 80$. Таким чином, пряма $x_3 = 0$ проходить через точки з координатами (0, 80) та (80, 0). Ця пряма ділить координатну площину на дві півплощини. Щоб визначити півплощину, у якій базисна змінна x_3 набуває допустимих (невід'ємних) значень, підставимо координати будь-якої точки (для спрощення розрахунків – початок координат) у рівняння. Оскільки $80-0-0>0$, то саме в цій півплощині x_3 набуває допустимих значень; ця півплощина позначена штрихуванням (див. рис. 2.1).

Для інших рівнянь розрахунки та побудова відповідних прямих виконуються аналогічно:

$$
\begin{array}{llllll}
y_1=0; & -1+0{,}1x_1-0{,}1x_2=0; & x_1=50, & x_2=40; & x_2=0, & x_1=10. \\
y_2=0; & 36-x_1=0; & x_1=36, & x_2=0; & x_2=50, & x_1=36. \\
y_3=0; & 26-x_2=0; & x_1=0, & x_2=28; & x_2=28, & x_1=50. \\
y_4=0; & -40+x_1+x_2=0; & x_1=0, & x_2=40; & x_2=0, & x_1=40.
\end{array}
$$

На підставі отриманих даних будуємо систему обмежень і визначаємо ОДР (див. рис. 2.1).

Градієнт цільової функції знаходять за коефіцієнтами відповідного їй виразу $\nabla C=(10,30)$; отриманий вектор позначений на рис. 2.1 товстою стрілкою. Максимум цільової функції досягається у вершині ОДР, яка лежить на перетині обмежень $y_1=0$ і $y_2=0$ (точка *Г*). Визначимо її координати, розв'язавши систему відповідних рівнянь-обмежень:

$$
\begin{cases}
y_1=-1+0{,}1x_1-0{,}1x_2, \\
y_2=36-x_1.
\end{cases}
$$

Із цієї системи рівнянь знаходимо оптимальні значення $x_1=36$; $x_2=26$; $x_3=80-36-26=18$, тобто на 1-й вантажний фронт необхідно подати 36 вагонів, на 2-й – 26 вагонів, на 3-й – 18 вагонів. При цьому загальний прибуток буде складати: $C_{\max}=30\cdot 36+50\cdot 26+20\cdot 18=2\,740$ грн.

Загальні властивості розв'язку ОЗЛП. Незважаючи на те, що наведене рішення ОЗЛП є окремими випадком, коли кількість вільних змінних $n-m=2$, з нього випливають деякі висновки, що належать до загальних властивостей розв'язання задач лінійного програмування [1, 5, 7].

1. ОЗЛП може не мати розв'язку, якщо ОДР побудувати неможливо, тобто коли система рівнянь-обмежень є несумісною.

2. Розв'язок ОЗЛП, якщо він існує, не може бути всередині ОДР, а лише на її границі.

3. Розв'язок ОЗЛП може бути не єдиним у тому випадку, якщо пряма, яка відповідає цільовій функції, паралельна одній із сторін багатокутника ОДР.

4. ОЗЛП може не мати оптимального розв'язку, навіть за наявності ОДР, якщо ОДР не обмежена в напрямку «покращення» цільової функції.

5. У кожній з вершин багатокутника ОДР досягається один з допустимих розв'язків ОЗЛП; кожна така вершина (точка) називається *опорною*.

6. Оптимальний розв'язок ОЗЛП завжди розташований в одній з вершин багатокутника ОДР; в окремих випадках розв'язок ОЗЛП досягається в усіх точках однієї з границь ОДР (коли пряма цільової функції паралельна границі ОДР).

7. Для знаходження оптимального розв'язку ОЗЛП досить перебрати опорні точки (вершини) ОДР, а потім вибрати ту точку, у якій цільова функція досягає потрібного екстремуму (мінімуму або максимуму).

8. У кожній опорній точці (вершині ОДР) принаймні $k = n - m$ вільних змінних дорівнюють нулю, оскільки ОДР утворюють прямі, що відповідають рівнянням-обмеженням, коли відповідна базисна змінна дорівнює нулю $y_i = 0$. Коли у вершині ОДР обертаються на нуль більше ніж n–m вільних змінних, то маємо випадок виродження.

Контрольні запитання та завдання

1. Що таке математичне програмування?
2. Які основні риси задач лінійного програмування?
3. Які додаткові обмеження накладаються на значення всіх змінних в задачах лінійного програмування?
4. Наведіть приклади задач лінійного програмування на транспорті.
5. Формальна постановка основної задачі лінійного програмування.
6. Що таке цільова функція в задачах лінійного програмування?
7. Якщо треба максимізувати цільову функцію, як перейти до класичної постановки задачі лінійного програмування?

8. Що таке допустимий розв'язок у задачах лінійного програмування?
9. Що таке оптимальний розв'язок у задачах лінійного програмування?
10. У яких випадках задача лінійного програмування може не мати розв'язку?
11. У якому випадку задача лінійного програмування може мати допустимі розв'язки та не мати оптимального?
12. У якому випадку задача лінійного програмування може мати тільки один допустимий розв'язок?
13. Скільки може бути базисних змінних у задачі лінійного програмування?
14. Скільки може бути вільних змінних у задачі лінійного програмування?
15. Чому задачу лінійного програмування не можна розв'язати шляхом диференціації цільової функції?
16. Як у задачах лінійного програмування перейти від нерівностей до рівнянь? Навести приклади.
17. У якому випадку задача лінійного програмування може бути розв'язана графічно?
18. Що таке область допустимих розв'язків при розв'язанні задачі лінійного програмування графічним методом?
19. Як побудувати область допустимих розв'язків при вирішенні задачі лінійного програмування графічним методом?
20. Що визначає градієнт цільової функції при вирішенні задачі лінійного програмування графічним методом?
21. Як побудувати градієнт цільової функції при розв'язанні задачі лінійного програмування графічним методом?
22. У якій частині ОДР може бути оптимальний розв'язок при розв'язанні задачі лінійного програмування графічним методом?
23. У якому випадку задача лінійного програмування може мати безліч розв'язків при її розв'язанні графічним методом?
24. У якому випадку задача лінійного програмування може не мати оптимального розв'язку при її розв'язанні графічним методом?
25. Які властивості вершин ОДР у задачах лінійного програмування? Яких значень набувають змінні у вершинах ОДР?

26. Як знайти координати вершини ОДР при графічному розв'язанні задач лінійного програмування?
27. Автотранспортне підприємство має у своєму розпорядженні вантажні автомобілі 3 типів у кількості відповідно n_1, n_2 та n_3. Підприємство отримало замовлення на перевезення партії вантажу розміром *M* т. Кількість вантажу, яку може перевезти кожний автомобіль, складає, залежно від його типу, відповідно q_1, q_2 та q_3 т. Завантаження автомобілів здійснюється послідовно на вантажному пункті, час роботи якого протягом доби складає *T* годин; тривалість завантаження автомобіля, залежно від його типу, складає t_1, t_2 та t_3. Питомі витрати на перевезення однієї тонни вантажу в автомобілі залежать від його типу і складають відповідно c_1, c_2 та c_3 грн. Необхідно визначити кількість автомобілів кожного типу для перевезення партії вантажу таким чином, щоб загальні витрати на перевезення були мінімальними. Виконати формалізацію та побудувати математичну модель цієї задачі.
28. На складі зберігається *k* типів тарно-штучного вантажу кількістю n_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$. Для кожного типу вантажу відомі характеристики одного вантажного місця: маса q_i, об'єм v_i та тривалість завантаження у вагон t_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$. На склад подано 1 критий вагон вантажопідйомністю *Q* та місткістю *V*. Необхідно завантажити вагон таким чином, щоб його вантажопідйомність та об'єм були використані не менше ніж на 75 %, а загальний час завантаження вагона був мінімальним. Виконати формалізацію та побудувати математичну модель цієї задачі.
29. Для перевезення вантажів зі складу у *n* магазинів можуть бути використані автомобілі *k* різних типів. До кожного магазину необхідно перевезти не більше заданого обсягу вантажу Q_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$. За один рейс автомобіль *i*-го типу $(i = 1, 2, \ldots, k)$ може перевезти до *j*-го магазину $(j = 1, 2, \ldots, n)$ q_{ij} вантажу. Тривалість одного рейсу до *j*-го магазину становить t_j. Загальна тривалість роботи автомобіля *i*-го типу не повинна перевищувати величину T_i. Прибуток від одного рейсу автомобіля *i*-го типу до *j*-го магазину складає c_{ij} грн. Необхідно ви-

значити для кожного типу автомобілів кількість рейсів до кожного магазину таким чином, щоб загальний прибуток від перевезень був максимальним. Виконати формалізацію та побудувати математичну модель цієї задачі.

30. За добу на склад для вивантаження надходять вантажі k різних типів у обсягах Q_j, $j = 1, 2, \ldots, k$. Вивантаження кожного типу вантажу може виконувати будь-який з n вантажних механізмів. Кожний i-й механізм ($i = 1, 2, \ldots, n$) за годину роботи може розвантажити q_{ij} вантажу j-го типу ($j = 1, 2, \ldots, k$); при цьому тривалість роботи i-го механізму протягом доби має не перевищувати величину T_i. Вартість години роботи i-го механізму становить c_i грн. Необхідно для кожного механізму визначити тривалість його роботи з розвантаження кожного типу вантажу таким чином, щоб загальна вартість вивантаження була мінімальною. Виконати формалізацію та побудувати математичну модель цієї задачі.

31. На складі сталеплавильного комплексу здійснюється навантаження залізничних 25-метрових рейок типу Р50 (маса 1 м погонної довжини 50 кг) та Р65 (маса 1 м погонної довжини 65 кг) козловим краном та стріловим автокраном. За час T необхідно завантажити на платформи N_{50} рейок типу Р50 та N_{65} рейок типу Р65. Козловий кран за годину може завантажити $q_{\text{К}-50}$ т рейок Р50, а рейок Р65 – $q_{\text{К}-65}$ т; автокран за годину може завантажити $q_{\text{А}-50}$ т рейок Р50 та $q_{\text{А}-65}$ т рейок Р65. Вартість навантаження 1 т рейок Р50 козловим краном становить $c_{\text{К}-50}$ грн, а автокраном – $c_{\text{А}-50}$ грн; вартість навантаження 1 т рейок Р65 становить відповідно $c_{\text{К}-65}$ та $c_{\text{А}-65}$ грн. Необхідно розподілити обсяги навантаження рейок між кранами таким чином, щоб весь обсяг навантаження був виконаний, а загальна вартість робіт була мінімальною. Виконати формалізацію та побудувати математичну модель цієї задачі.

32. Середньодобовий пасажиропотік на одному з міських кільцевих маршрутів з 6^{00} до 24^{00} становить A. На маршруті працюють мікроавтобуси (МА), автобуси середньої (СА) та великої місткості (ВА). Перерва в роботі кожного автобуса становить 2 години. Парк автобусів становить відповідно $N_{\text{МА}}$, $N_{\text{СА}}$, та

$N_{\text{ВА}}$ одиниць; місткість автобусів – відповідно $a_{\text{МА}}$, $a_{\text{СА}}$, та $a_{\text{ВА}}$ пасажирів; тривалість обороту автобусів на маршруті становить відповідно $t_{\text{МА}}$, $t_{\text{СА}}$, та $t_{\text{ВА}}$ годин; прибуток від перевезення одного пасажира в автобусі становить відповідно $C_{\text{МА}}$, $C_{\text{СА}}$, та $C_{\text{ВА}}$ грн. Кількість пасажирів, що перевозиться у МА, не повинна перевищувати обсяги перевезень пасажирів у ВА більше ніж на K %. Автотранспортному підприємству необхідно так спланувати добовий випуск автобусів на маршрут, щоб отриманий прибуток був максимальним. Виконати формалізацію та побудувати математичну модель цієї задачі.

33. На трьох ділянках залізничного напрямку (рис. 2.2) необхідно організувати рух пасажирських поїздів, щоб забезпечити перевезення пасажиропотоків у обсягах відповідно A_1, A_2, A_3. Кількість місць у поїзді кожного i-го призначення a_i та витрати на експлуатацію поїзда c_i наведені на рис. 2.2. Кількість поїздів кожного i-го призначення не може перевищувати величину N_i. Необхідно визначити найбільш економічно вигідну кількість пасажирських поїздів кожного призначення. Виконати формалізацію та побудувати математичну модель цієї задачі.

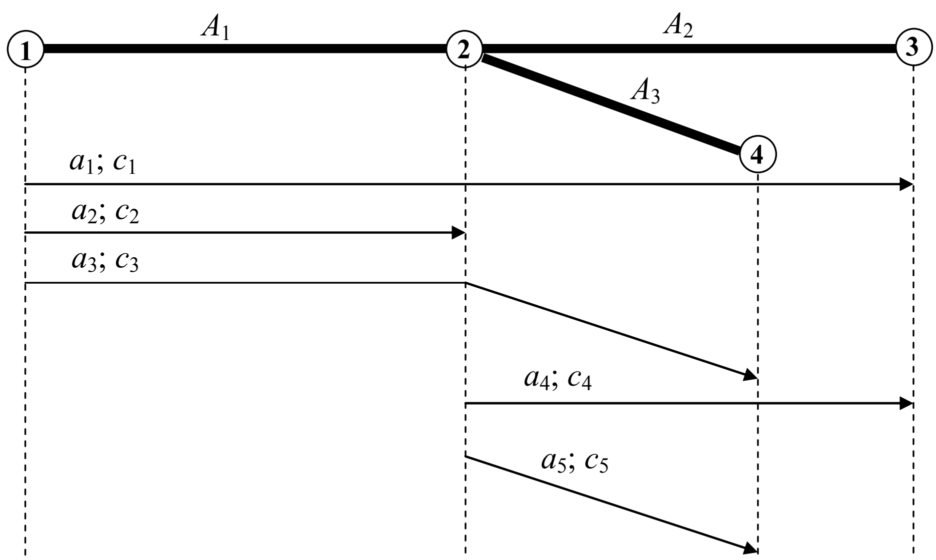


Рис. 2.2. Схема залізничного напрямку

34. Побудувати ОДР для системи обмежень $2x_1 + x_2 \ge 20$, $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$.
35. Побудувати ОДР для системи обмежень $3x_1 + 2x_2 \le 24$, $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$.
36. Для ОДР, що наведені на рис. 2.3, вказати мінімальне та максимальне значення таких цільових функцій: $C_1 = x_1$, $C_2 = -x_1$, $C_3 = x_2$, $C_4 = -x_2$, $C_5 = 2x_1 + x_2$, $C_6 = -2x_1 + 3x_2$.

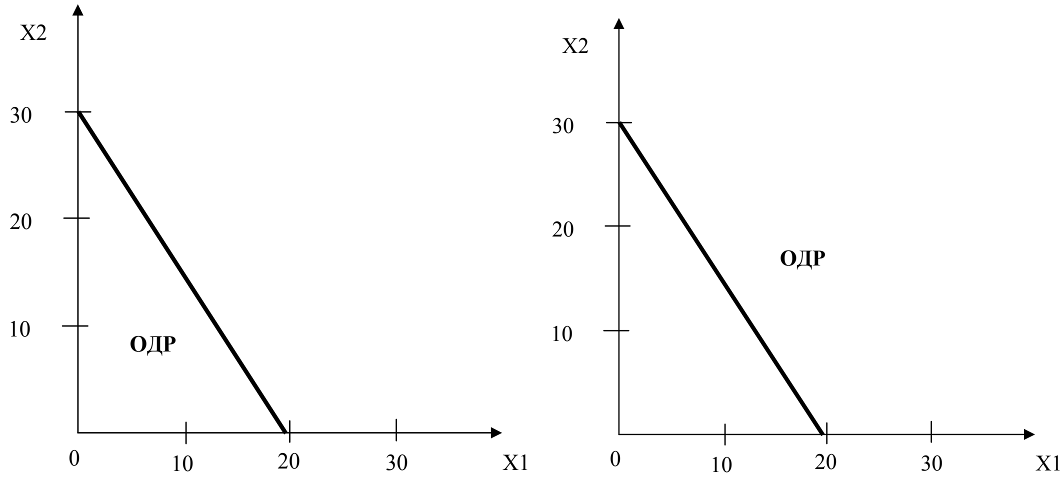


Рис. 2.3. Приклади областей допустимих розв’язків

37. Розв’язати задачу лінійного програмування графічним методом та знайти максимальне значення цільової функції $C = 2x_1 + 3x_2$ при обмеженнях $x_1 + x_2 \le 4$, $2x_1 + x_2 \le 6$, $x_1 + x_2 \le 1$, $2x_1 - x_2 \le 5$, $x_2 \le 2$.
38. Розв’язати задачу лінійного програмування графічним методом та знайти максимальне значення цільової функції $C = 4x_1 - x_2 + 1$ при обмеженнях $x_1 - 2x_2 - x_3 + 3 = 0$, $2x_1 + 2x_2 \ge 1$, $x_1 \le 2$.
39. Розв’язати задачу лінійного програмування графічним методом та знайти максимальне значення цільової функції $C = 25x_1 + x_4 + 20$ при обмеженнях $5x_1 + 18x_2 - x_3 = 90$, $x_1 + x_2 \le 25$, $9x_1 + 4x_2 \ge 72$, $7x_1 - 9x_2 + x_4 = 63$, $-9x_1 + 17x_2 + x_5 = 153$.
40. Розв’язати задачу лінійного програмування графічним методом та знайти мінімальне значення цільової функції

$C = 2x_1 + 2x_2 - x_3$ при обмеженнях $x_1 + x_2 - x_3 + 4 = 0$, $x_1 + 2x_2 \geq 5$, $4x_1 + x_2 \leq 4$, $3x_2 - x_3 + 5 \geq 0$.

41. Розв'язати задачу лінійного програмування графічним методом та знайти мінімальне значення цільової функції $C = 12x_2 - x_3 + 80$ при обмеженнях $x_1 \geq 4$, $x_1 + x_2 \geq 6$, $-3x_1 + 8x_2 + x_3 = 48$, $8x_1 + 11x_2 + x_4 = 176$, $2x_1 - x_2 \leq 20$.

РОЗДІЛ 3

Симплекс-метод розв’язання задач лінійного програмування

3.1. Загальний принцип симплекс-методу

Якщо в системі лінійних рівнянь-обмежень (2.1) кількість вільних змінних більше ніж дві ($n - m > 2$), то задачу лінійного програмування доцільно розв’язувати не графічним, а одним з обчислювальних методів, найбільш універсальним з яких є симплекс-метод, розроблений Дж. Данцигом [8].

Принцип симплекс-методу базується на властивостях розв’язку ОЗЛП (див. п. 2.3). При розв’язанні задачі лінійного програмування симплекс-методом здійснюється цілеспрямований послідовний перехід від одного допустимого розв’язку (опорної точки ОДР) до іншого, поки не буде знайдений оптимальний розв’язок (або доведена неможливість його знаходження).

Як випливає з властивостей розв’язку ОЗЛП, у кожній опорний точці ОДР принаймні $k = n - m$ вільних змінних дорівнюють нулю. Таким чином, прирівнявши до нуля будь-які k вільних змінних ($x_j = 0$), можна отримати значення всіх інших (базисних) змінних (y_i) та цільової функції C, тобто певний розв’язок задачі; якщо при цьому значення всіх базисних змінних невід’ємні ($y_i \geq 0$), то такий розв’язок є допустимим (розташований в одній з вершин ОДР). Для знаходження нового (кращого) рішення необхідно зробити перерозподіл між вільними та базисними змінними, тобто одну з вільних змінних зробити базисною, а натомість одну з базисних змінних зробити вільною [1, 3, 8].

Розглянемо систему рівнянь-обмежень та цільову функцію:

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n + b_1, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n + b_2, \\ \ldots \\ y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n + b_i, \\ \ldots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n + b_m, \end{cases} \tag{3.1}$$

$$C = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_jx_j + \ldots + c_nx_n + c_0 \to \min. \tag{3.2}$$

Нехай $x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_n$ – вільні змінні, $y_1, y_2, \ldots, y_i, \ldots, y_m$ – базисні змінні. Якщо вільні змінні x_j прирівняти до нуля і підставити у (3.1), то отримаємо один з можливих розв'язків:

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ \ldots,\ x_j = 0,\ \ldots,\ x_n = 0,$$

$$y_1 = b_1,\ y_2 = b_2,\ \ldots,\ y_i = b_i,\ y_m = b_m,\ C = c_0.$$

При цьому, якщо всі базисні змінні $y_i \ge 0$, то отриманий розв'язок є допустимим. Таким чином, *якщо в системі рівнянь-обмежень (3.1) значення всіх вільних коефіцієнтів невід'ємні ($b_i \ge 0$), то такий розв'язок є допустимим*.

Знайдений допустимий розв'язок необхідно покращити таким чином, щоб у наступному розв'язанні цільова функція *C* зменшилась (3.2). Очевидно, що вільні змінні x_j зменшити не можна ($x_j = 0$). Тож зменшити значення цільової функції *C* можливо лише в тому випадку, якщо збільшити значення тих вільних змінних x_j, біля яких у виразі цільової функції (3.2) відповідний коефіцієнт c_j має від'ємне значення (зі збільшенням такої вільної змінної x_j значення цільової функції *C* буде зменшуватись). Звідси можна зробити висновок, що, *якщо всі коефіцієнти c_j при вільних змінних x_j у виразі цільової функції (3.2) будуть додатними ($c_j > 0$), то отриманий допустимий розв'язок буде оптимальним*, оскільки покращити його неможливо.

Для покращення отриманого допустимого розв'язку вільну змінну x_j з від'ємним коефіцієнтом ($c_j < 0$) у цільовій функції необхідно зробити базисною (ввести у базис), а ту у свою чергу – вільною (заміна змінних). Очевидно, що зі збільшенням вільної змінної x_j зменшуватися будуть тільки ті базисні змінні y_i, для яких у відповідних рівняннях-обмеженнях (3.1) коефіцієнт біля даної вільної змінної x_j є від'ємним ($a_{ij} < 0$). Міняти вільну змінну x_j треба на ту з базисних y_i, яка раніше за інші базисні змінні обернеться в нуль зі збільшенням значення x_j, тобто зі збільшенням вільної змінної x_j жодна з базисних змінних y_i не повинна стати від'ємною. Звідси випливає, що вибір базисної змінної y_i для заміни визначається за мінімумом відношення b_i / a_{ij} .

Важливо зазначити, якщо всі коефіцієнти a_{ij} при вільній змінній x_j, яка вводиться в базис, в усіх рівняннях-обмеженнях (3.1) мають невід'ємні значення ($a_{ij} \geq 0$), то це означає, що вільну змінну x_j можна збільшувати нескінченно, а цільова функція (3.2) необмежена знизу, й оптимального розв'язку задачі не існує (цільову функцію можна мінімізувати нескінченно).

Розглянемо приклад, коли в базис вводиться вільна змінна x_2 (3.1). У цьому випадку вибір для заміни базисної змінної y_i необхідно здійснювати за мінімумом серед відношень

$$b_1 / a_{12}\,;\; b_2 / a_{22}\,;\; \ldots;\; b_i / a_{i2}\,;\; \ldots;\; b_m / a_{m2}\,.$$

Наприклад, якщо $b_2 / a_{22} = \min$, тоді вільна змінна x_2 вводиться в базис ($x_2 > 0$), натомість базисна змінна y_2 повинна стати вільною ($y_2 = 0$). Для заміни змінних x_2 та y_2 необхідно розв'язати рівняння $y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n + b_2$, виразивши нову базисну змінну x_2 через нову вільну змінну y_2 та інші вільні змінні x_j:

$$x_2 = \frac{-a_{21}}{a_{22}}x_1 + \frac{1}{a_{22}}y_2 \ldots - \frac{a_{2j}}{a_{22}}x_j \ldots - \frac{a_{2n}}{a_{22}}x_n - \frac{b}{a_{22}}.$$

Отриманий вираз необхідно підставити замість змінної x_2 в усі інші рівняння (3.1) та цільову функцію (3.2). У результаті отримаємо нову систему, у якій базисні змінні та цільова функція виражені через новий набір вільних змінних, що включає y_2. Після цього отриманий розв’язок знову перевіряється на оптимальність.

Слід зазначити, що аналогічним чином здійснюється заміна змінних при пошуку допустимого розв’язку. Нагадаємо, якщо хоча б один з коефіцієнтів b_i у системі рівнянь (3.1) має від’ємне значення, то такий розв’язок не є допустимим (знаходиться поза межами ОДР), оскільки в цьому випадку хоча б одна з базисних змінних $y_i < 0$. Для пошуку допустимого розв’язку необхідно одну з вільних змінних x_j ввести в базис, тобто надати їй додатного значення, а одну з базисних змінних y_i зробити вільною, надавши їй нульового значення.

При цьому, якщо в рівнянні, для якого $b_i < 0$, усі коефіцієнти при x_j мають від’ємні значення ($a_{ij} < 0$), то така система рівнянь є несумісною і розв’язати цю задачу лінійного програмування неможливо. Для прикладу розглянемо рівняння $y_1 = -3x_1 - 4x_2 - 5x_3 - 6$. Якщо вільні змінні $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, то $y_1 = -6$, і цей розв’язок не є допустимим. Очевидно, що зі збільшенням значення (уведенні в базис) будь-якої з вільних змінних x_j значення змінної y_1 буде тільки зменшуватись ($y_1 < -6$); отже, така задача не має розв’язку.

3.2. Розв’язання ОЗЛП симплекс-методом у табличній формі

3.2.1. Табличний алгоритм симплекс-методу

Для спрощення процедури перетворення системи (3.1)–(3.2) при заміні вільних і базисних змінних було розроблено табличний алгоритм симплекс-методу, який передбачає виконання всіх розрахунків не з рівняннями, а з таблицями коефіцієнтів цих рівнянь. При цьому пошук розв’язку ОЗЛП може виконуватися за таким алгоритмом [1, 3, 6].

Крок 1. Привести цільову функцію та систему рівнянь-обмежень задачі до стандартного вигляду:

$$C = c_0 - \left(c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_k x_n\right) \to \min,$$

$$y_i = b_{i0} - \left(a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \ldots + a_{ik} x_n\right), \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Якщо потрібно знайти максимум цільової функції, то у виразі цільової функції попередньо необхідно змінити знаки постійних коефіцієнтів на протилежні. На підставі отриманих рівнянь побудувати симплекс-таблицю, у яку записати коефіцієнти цільової функції та рівнянь (рис. 3.1); коефіцієнти записуються в нижні праві кути клітин таблиці.

Рядок цільової функції

Вільні змінні

Базисні змінні

	b_i	x_1	x_2	...	x_n
C	c_0	c_1	c_2	…	c_n
y_1	b_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}
y_2	b_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}
...	…	…	…	…	…
y_m	b_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}

Рис. 3.1. Загальний вигляд симплекс-таблиці

Крок 2. Якщо всі вільні коефіцієнти b_i мають невід’ємні значення ($b_i \geq 0$), то такий розв’язок є допустимим; перейти *до кроку 5*, інакше – *до кроку 3*.

Крок 3. У будь-якому рядку з від’ємним значенням b_i знайти стовпчик з від’ємним значенням a_{ij}. Цей стовпчик *s* є розв’язувальним. Якщо в таблиці немає розв’язувального стовпчика, то така система обмежень несумісна, і задача не має розв’язку – *кінець алгоритму*.

У розв’язувальному стовпчику *s* необхідно знайти розв’язувальний рядок *r*. З цією метою для всіх елементів розв’язувального стовпчика *s*, які мають той самий знак, що і вільний коефіцієнт b_i, знайти відношення $\lambda_i = b_i / a_{is}$. Рядок r з найменшим значенням λ_i є розв'язувальним. Перейти *до кроку 4*.

Крок 4. Виконати *заміну змінних* (див. нижче) і перейти *до кроку 2*.

Крок 5. Якщо всі коефіцієнти цільової функції мають від'ємні значення ($c_j < 0,\ j > 0$), то такий розв'язок є оптимальним – *кінець алгоритму*, інакше перейти *до кроку 6*.

Крок 6. Стовпчик s з найбільшим додатнім значенням c_j $(j > 0)$ є розв'язувальним. У цьому стовпчику знайти розв'язувальний рядок r (див. крок 3) і перейти *до кроку 7*.

Крок 7. Виконати заміну змінних і перейти *до кроку 5*.

3.2.2. Алгоритм заміни змінних у симплекс-таблиці

При заміні змінних вільна змінна, що відповідає розв'язувальному стовпчику s, стає базисною, натомість базисна змінна, яка відповідає розв'язувальному рядку r, стає вільною. У верхні ліві кути поточної симплекс-таблиці записують значення α, які розраховуються таким чином:

$\alpha_{rs} = 1/a_{rs}$ – для розв'язувального елемента, який знаходиться на перетині розв'язувальних рядка s та стовпчика r;

$\alpha_{rj} = a_{rj}\alpha_{rs}$ $(j = 1, \ldots, n;\ j \neq s)$ – для усіх елементів розв'язувального рядка r;

$\alpha_{is} = -a_{is}\alpha_{rs}$ $(i = 1, \ldots, m;\ i \neq r)$ – для усіх елементів розв'язувального стовпчика s;

$\alpha_{ij} = a_{rj}\alpha_{is}$ $(i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n;\ i \neq r;\ j \neq s)$ – для всіх інших елементів таблиці.

У новій симплекс-таблиці необхідно поміняти місцями базисну та вільну змінні в розв'язувальних рядку r та стовпчику s. У праві нижні кути клітин нової симплекс-таблиці записуються нові значення коефіцієнтів d_{ij}, які розраховуються таким чином:

$d_{rj} = \alpha_{rj}$ $(j = 1, \ldots, n)$– для елементів розв'язувального рядка r;

$d_{is} = \alpha_{is}$ $(i = 1, \ldots, m)$– для елементів розв'язувального стовпчика s;

$d_{ij} = \alpha_{ij} + a_{ij}$ $(j = 1, \ldots, n;\ i = 1, \ldots, m;\ i \neq r;\ j \neq s)$ – для всіх інших елементів.

Приклад розв'язання ОЗЛП симплекс-методом. Табличний алгоритм симплекс-методу розглянемо на прикладі розв'язання задачі лінійного програмування, умова якої наведена у п. 2.3. Приведемо систему рівнянь та цільову функцію (2.3) до стандартного вигляду:

$$\begin{cases} x_3 = 80 - x_1 - x_2, \\ y_1 = -1 + 0{,}1x_1 - 0{,}1x_2, \\ y_2 = 36 - x_1, \\ y_3 = 28 - x_2, \\ y_4 = -40 + x_1 + x_2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 80 - \left(x_1 + x_2\right), \\ y_1 = -1 - \left(-0{,}1x_1 + 0{,}1x_2\right), \\ y_2 = 36 - x_1, \\ y_3 = 28 - x_2, \\ y_4 = -40 - \left(-x_1 - x_2\right), \end{cases}$$

$$C = 1\,600 + 10x_1 + 30x_2 \to \max \Rightarrow C^* = -1\,600 - \left(10x_1 + 30x_2\right) \to \min .$$

Порядок розв'язання задачі симплекс-методом наведений на рис. 3.2.

Розглянемо цей приклад детальніше. Початковий розв'язок (рис. 3.2, *Ітерація 1*) не є допустимим, оскільки в стовпчику вільного коефіцієнта b_0 є від'ємні елементи в рядках y_1 (–1) та y_4 (–40). В одному з цих рядків, наприклад, y_1 знаходимо від'ємний елемент (–0,1) у стовпчику x_1; цей стовпчик є розв'язувальним (виділяємо його у першій таблиці на рис. 3.2). Для пошуку розв'язувального рядка розраховуємо відношення вільних коефіцієнтів у стовпчику b_0 до відповідних елементів у розв'язувальному стовпчику x_1: $80/1$, $-1/(-0{,}1)$, $36/1$, $-40/(-1)$ та обираємо мінімальне значення: $-1/(-0{,}1) = 10$; отже, розв'язувальним є рядок y_1 (виділяємо його в таблиці).

На перетині рядка y_1 та стовпчика x_1 маємо розв'язувальний елемент; його нове значення $\alpha_{rs} = 1/(-0{,}1) = -10$ записується у верхній лівий кут цієї клітини. Кожний елемент розв'язувального рядка y_1 множимо на α_{rs} (на –10), а кожний елемент розв'язувального стовпчика x_1 множимо на $-\alpha_{rs}$ (на 10); отримані значення записуємо у верхні ліві кути відповідних клітин. У розв'язувальному рядку виділяємо (підкресленням) елементи в правих нижніх кутах клітин, а у розв'язувальному стовпчику – елементи у лівих верхніх кутах клітин. Для усіх інших елементів розраховуємо добуток відповідних виділених (підкреслених) елементів розв'язувальних рядка та стовпчика: наприклад, для елемента на перетині рядка *C* (виділений елемент 100) та стовпчика b_0 (виділений елемент –1) знаходимо добуток $100 \cdot (-1) = -100$. Отримані значення записуються у верхні праві кути відповідних клітин.

Перетворимо симплекс-таблицю (рис. 3.2, *Ітерація 2*). Базисна змінна y_1 стає вільною, а вільна змінна x_1 – базисною. У нижні праві кути клітин розв'язувального рядка та стовпчика нової таблиці записуємо значення, що розташовані у верхніх лівих кутах клітин цих рядка та стовпчика в попередній таблиці. Для всіх інших клітин у нижні праві кути нової таблиці записуємо суму елементів, що розташовані в нижніх правих та у верхніх лівих кутах в цих клітинах у попередній таблиці. Отриманий розв'язок (рис. 3.2, *Ітерація 2*) не є допустимим, оскільки у рядку y_4 є від'ємний елемент (–30) у стовпчику b_0; пошук допустимого розв'язку здійснюється аналогічно.

Ітерація 1 (точка А)

	b_0	x_1	x_2	
C'	-100 -1600	100 10	10 30	
x_3	-10 80	10 1	1 1	$\frac{80}{1}$
y_1	10 -1	-10 -0,1	-1 0,1	$\frac{-1}{-0,1}$
y_2	-10 36	10 1	1 0	$\frac{36}{1}$
y_3	0 28	0 0	0 1	
y_4	10 -40	-10 -1	-1 -1	$\frac{-40}{-1}$

Ітерація 2 (точка Б)

	b_0	y_1	x_2	
C'	-600 -1700	-200 100	20 40	
x_3	-30 70	-10 10	1 2	$\frac{70}{2}$
x_1	15 10	5 -10	-0,5 -1	
y_2	-15 26	-15 10	0,5 1	$\frac{26}{1}$
y_3	-13 28	-5 0	0,5 1	$\frac{28}{1}$
y_4	15 -30	5 -10	-0,5 -2	$\frac{-30}{-2}$

Ітерація 3 (точка В) – допустимий розв'язок

	b_0	y_1	y_4	
C'	-440 -2300	-200 -100	-40 20	
x_3	-22 40	-10 0	-2 1	$\frac{40}{1}$
x_1	11 25	5 -5	1 -0,5	
y_2	22 11	10 5	2 0,5	$\frac{11}{0,5}$
y_3	-11 13	-5 -5	-1 0,5	$\frac{13}{0,5}$
x_2	11 15	5 5	1 -0,5	

Ітерація 4 (точка Г) – оптимальний розв'язок

	b_0	y_1	y_2
C'	-2740	-300	-40
x_3	18	-10	-2
x_1	36	0	1
y_4	22	10	2
y_3	2	-10	-1
x_2	26	10	1

Рис. 3.2. Розв'язання задачі розподілу вагонів симплекс-методом

Після знаходження допустимого розв'язку (рис. 3.2, *Ітерація 3*) він перевіряється на оптимальність. Оскільки у рядку C' у стовпчику y_4 є додатній елемент (20), то цей розв'язок не є оптимальним; при цьому стовпчик y_4 обирається як розв'язувальний, а далі здійснюється пошук нового розв'язку за наведеним вище алгоритмом.

У результаті отримано оптимальний розв'язок (рис. 3.2, *Ітерація 4*); у цій симплекс таблиці в стовпчику b_0 усі елементи є невід'ємними, а у рядку C' – усі елементи мають від'ємні значення.

Важливо зауважити, що кожна симплекс-таблиця відповідає певному розв'язку задачі, у якому вільні змінні дорівнюють нулю, а базисні дорівнюють вільним членам b_0 відповідних рівнянь-обмежень. При геометричній інтерпретації рішення задачі кожна симплекс-таблиця (розв'язок) відповідає певній точці в (n–m)-вимірному просторі. Для прикладу, хід розв'язання розглянутої задачі про розподіл вагонів між вантажними фронтами показано на коор-динатній площині (див. рис. 2.1). Так, початковій симплекс-таблиці відповідає точка *А* ($x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 80$, $C = 1\,600$), що лежить за межами ОДР (цей розв'язок не є допустимим). Наступна симплекс-таблиця також відповідає недопустимому розв'язку – точка *Б* лежить за межами ОДР ($x_1 = 10$, $x_2 = 0$, $x_3 = 70$, $C = 1\,700$). Допустимому розв'язку відповідає точка *В*, яка є однією з вершин ОДР ($x_1 = 25$, $x_2 = 15$, $x_3 = 40$, $C = 2\,300$). Нарешті, оптимальний розв'язок задачі (максимум цільової функції) досягається в точці *Г* ($x_1 = 36$ вагонів, $x_2 = 26$ вагонів, $x_3 = 18$ вагонів, $C = 2\,740$ грн).

Слід зазначити, що розв'язок задач лінійного програмування можна отримати в середовищі електронних таблиць MS Excel за допомогою пакету «Пошук рішення» [14]. Для прикладу у дод. А наведений порядок розв'язання задачі про розподіл вагонів між вантажними фронтами з використанням електронних таблиць MS Excel.

Контрольні запитання та завдання

1. Пояснити загальний принцип симплекс-методу.
2. Який принцип вибору базисної змінної для заміни на вільну в процедурі заміни змінних симплекс-методу?
3. Який стандартний вигляд системи обмежень при розв'язанні задачі лінійного програмування симплекс-методом?
4. Який стандартний вигляд цільової функції при розв'язанні задачі лінійного програмування симплекс-методом?
5. Що являє собою кожна симплекс-таблиця?
6. Яким даним відповідає кожний рядок симплекс-таблиці?

7. Яким даним відповідає кожний стовпчик симплекс-таблиці?
8. Чому дорівнюють вільні змінні в кожній симплекс-таблиці?
9. Чому дорівнюють базисні змінні в кожній симплекс таблиці?
10. У якому випадку при розв’язанні задачі лінійного програмування симплекс-методом отриманий розв’язок вважається допустимим?
11. У якому випадку при розв’язанні задачі лінійного програмування симплекс-методом отриманий розв’язок вважається оптимальним?
12. Як за симплекс-таблицею визначити, що система обмежень задачі є несумісною?
13. Як за симплекс-таблицею визначити, що задача не має оптимального розв’язку?
14. Як обирається розв’язувальний стовпчик в симплекс-таблиці при пошуку допустимого розв’язку?
15. Як обирається розв’язувальний стовпчик в симплекс-таблиці при пошуку оптимального розв’язку?
16. Як обирається розв’язувальний рядок в симплекс-таблиці?
17. Як визначається нове значення розв’язувального елемента у сиплекс-таблиці?
18. Як визначаються нові значення елементів розв’язувального рядка симплекс-таблиці при виконанні алгоритму заміни змінних?
19. Як визначаються нові значення елементів розв’язувального стовпчика симплекс-таблиці при виконанні алгоритму заміни змінних?
20. Як визначаються нові значення елементів симплекс-таблиці, що розташовані не у розв’язувальних рядку та стовпчику?
21. Для обмеження $5x_1 - x_2 - x_3 + 6x_4 - 12 = 0$ записати відповідний рядок симплекс-таблиці, якщо відомо, що базисна змінна – x_2, а вільні – x_1, x_3, x_4, x_5.
22. Для обмеження $3x_1 + 6x_2 - 3x_3 + 9x_4 - 15 = 0$ записати відповідний рядок симплекс-таблиці, якщо відомо, що базисна змінна – x_1, а вільні – x_2, x_3, x_4.
23. Для цільової функції $C = 4x_1 - 8x_2 + 2x_3 + 12 \rightarrow \min$ записати відповідний рядок симплекс-таблиці, якщо відомо, що вільні змінні – y_1, x_1, x_2, x_3.

24. Для цільової функції $C = -x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 10 \to \max$ записати відповідний рядок симплекс-таблиці, якщо відомо, що вільні змінні – x_1, x_2, x_3.
25. Розв'язати задачу лінійного програмування симплекс-методом та знайти мінімальне значення цільової функції $C = -3x_1 + 7x_2 + 3x_4$ при обмеженнях: $x_1 + x_4 = 4$, $-9x_1 + 2x_2 - 7x_4 < 7$, $3x_1 + 2x_2 - 5x_3 > 3$, $4x_1 - x_2 + 4x_4 < 7$.
26. Розв'язати задачу лінійного програмування симплекс-методом та знайти максимальне значення цільової функції $C = 9x_1 + 3x_4$ при обмеженнях: $8x_1 + x_4 = 6$, $8x_1 + x_2 + 2x_3 > 6$, $x_2 > 6$, $-8x_3 + 2x_4 > 3$.
27. Розв'язати задачу 27 з розд. 2 симплекс-методом за таких вихідних даних: $n_1 = 15$, $n_2 = 7$, $n_3 = 5$, $M = 180$ т, $q_1 = 8$ т, $q_2 = 10$ т, $q_3 = 20$ т, $T = 13$ год, $t_1 = 0,6$ год, $t_2 = 1,0$ год, $t_3 = 1,2$ год, $c_1 = 13$ грн, $c_2 = 12$ грн, $c_3 = 8$ грн.
28. Розв'язати задачу 28 з розд. 2 симплекс-методом за таких вихідних даних: $k = 3$, $n_1 = 25$, $n_2 = 35$, $n_3 = 15$, $q_1 = 0,75$ т, $q_2 = 1$ т, $q_3 = 1,5$ т, $v_1 = 1$ м^3, $v_2 = 2,5$ м^3, $v_3 = 1,5$ м^3, $t_1 = 0,05$ год, $t_2 = 0,15$ год, $t_3 = 0,08$ год, $Q = 68$ т, $V = 120$ м^3.
29. Розв'язати задачу 29 з розд. 2 симплекс-методом за таких вихідних даних: $n = 2$, $k = 2$, $Q_1 = 120$ т, $Q_2 = 110$ т, $q_{11} = 15$ т, $q_{12} = 10$ т, $q_{21} = 12$ т, $q_{22} = 18$ т, $t_1 = 1$ год, $t_2 = 1,5$ год, $T_1 = 10$ год, $T_2 = 12$ год, $c_{11} = 80$ грн, $c_{12} = 60$ грн, $c_{21} = 65$ грн, $c_{22} = 70$ грн.
30. Розв'язати задачу 30 з розд. 2 симплекс-методом за таких вихідних даних: $n = 2$, $k = 3$, $Q_1 = 204$ т, $Q_2 = 180$ т, $Q_3 = 120$ т, $q_{11} = 9$ т, $q_{12} = 18$ т, $q_{13} = 16$ т, $q_{21} = 12$ т, $q_{22} = 15$ т, $q_{23} = 20$ т, $T_1 = 16$ год, $T_2 = 19$ год, $c_1 = 150$ грн, $c_2 = 200$ грн.
31. Розв'язати задачу 31 з розд. 2 симплекс-методом за таких вихідних даних: $T = 8$ год, $N_{50} = 1\,000$ шт., $N_{65} = 975$ шт., $q_{\text{К}-50} = 150$ т, $q_{\text{К}-65} = 180$ т, $q_{\text{А}-50} = q_{\text{А}-65} = 200$ т, $c_{\text{К}-50} = 20$ грн, $c_{\text{А}-50} = 30$ грн, $c_{\text{К}-65} = 25$ грн, $c_{\text{А}-65} = 32$ грн.
32. Розв'язати задачу 32 з розд. 2 симплекс-методом за таких вихідних даних: $A = 8\,000$ пас., $N_{\text{МА}} = 12$, $N_{\text{СА}} = 7$, $N_{\text{ВА}} = 5$,

$a_{\text{МА}} = 20$ пас., $a_{\text{СА}} = 40$ пас., $a_{\text{ВА}} = 60$ пас., $t_{\text{МА}} = 1$ год, $t_{\text{СА}} = 1{,}6$ год, $t_{\text{ВА}} = 2$ год, $C_{\text{МА}} = 3$ грн, $C_{\text{СА}} = 2$ грн, $C_{\text{ВА}} = 1{,}5$ грн, $K = 15$ %.

33. Розв’язати задачу 33 з розд. 2 симплекс-методом за таких вихідних даних: $A_1 = 6\,200$ пас., $A_2 = 4\,400$ пас., $A_3 = 4\,000$ пас., $a_1 = 400$ пас., $a_2 = 600$ пас., $a_3 = 500$ пас., $a_4 = 400$ пас., $a_5 = 500$ пас., $c_1 = 6$ тис. грн, $c_2 = 3$ тис. грн, $c_3 = 5$ тис. грн, $c_4 = 7$ тис. грн, $c_5 = 3$ тис. грн, $N_1 = 8$ поїздів.

РОЗДІЛ 4

Лінійне цілочислове програмування

4.1. Постановка задачі лінійного цілочислового програмування

Серед оптимізаційних задач дослідження операцій досить часто трапляються такі задачі, розв'язання яких передбачає отримання цілочислових результатів. Зокрема, фізичний зміст задачі розподілу вагонів по вантажних фронтах, розв'язання якої було розглянуто в попередніх розділах, передбачає отримання саме цілочислових результатів – кількість вагонів, що подаються на кожний з вантажних фронтів. Для розв'язання подібних задач використовуються методи цілочислового програмування [9]. У таких задачах на значення усіх або окремих змінних накладається додаткова умова цілочисловості.

Якщо в задачі цілочислового програмування цільова функція і обмеження є лінійними математичними виразами, то маємо *задачу лінійного цілочислового програмування (ЛЦП)*. Вона може бути сформульована таким чином: *знайти такі невід'ємні* ***цілочислові*** *значення змінних* $x_1, x_2, \ldots, x_n$*, які задовольняють систему рівнянь* $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$, $\left(i = 1, 2, \ldots, m\right)$ *і за яких цільова функція* $C = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$ *досягає екстремуму*.

4.2. Метод січних площин Гоморі для розв’язання задач лінійного цілочислового програмування

4.2.1. Загальний принцип методу Гоморі

На перший погляд, найпростіший метод розв’язання задачі лінійного цілочислового програмування – розв’язання задачі з неперервними змінними (наприклад, симплекс-методом) і подальше округлення отриманих нецілочислових результатів. Однак при цьому можливо отримати такий розв’язок, який не буде задовольняти систему обмежень (буде перебувати за межами ОДР). Тому для розв’язання задач ЛЦП використовуються спеціальні методи, серед яких найбільш поширеним є *методи відтинань*. Ці методи передбачають уведення до задачі додаткових обмежень, що «відтинають» ті частини ОДР, у яких немає цілочислових розв’язків [3, 5, 7].

Серед методів відтинань одним з найпоширеніших є *метод січних площин Гоморі* [5–7, 9], в основі якого лежить перетворення вихідної ОДР у багатогранник, екстремальні точки якого є цілочисловими розв’язками задачі. Усі допустимі цілочислові розв’язки повинні лежати на границі або усередині нової ОДР. Розглянемо принцип методу січних площин Гоморі на прикладі (рис. 4.1).

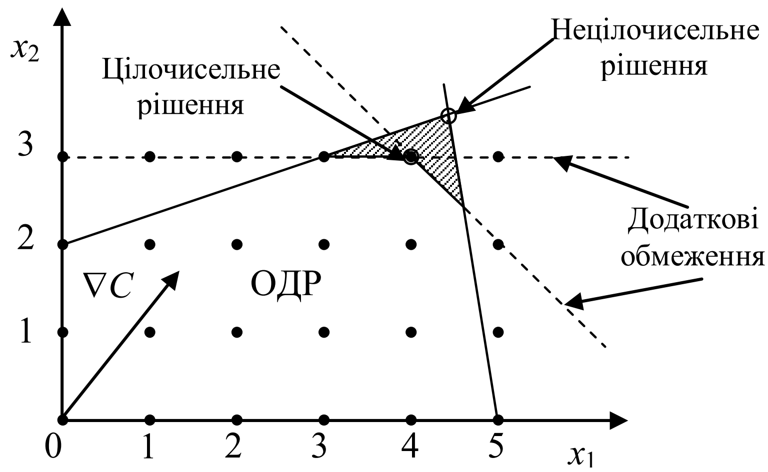


Рис. 4.1. Принцип методу відтинань

На рис. 4.1 наведено геометричну інтерпретацію розв’язання деякої задачі лінійного цілочислового програмування методом відтинань. Розв’язання задачі розглянутими вище методами призводить до отримання оптимального (але нецілочислового) рішення $x_1 = 4,5$ та $x_2 = 3,5$. Округлення отриманих значень дає розв'язок $\left(x_1' = 4,5;\right.$ $\left.x_2' = 3,5\right)$, який виходить за межі ОДР і тому не може бути прийнятим. Для отримання цілочислового розв'язку в задачу введено додаткові обмеження; відповідні їм прямі на рис. 4.1 виділено пунктиром. Вказані прямі «відтинають» нецілочислові області ОДР (заштрихована частина ОДР) і дають можливість отримати новий оптимальний цілочисловий розв'язок $\left(x_1^* = 4;\ x_2^* = 3\right)$.

4.2.2. Алгоритм побудови додаткових обмежень

Задача лінійного цілочислового програмування методом січних площин розв'язується двома етапами. На першому етапі розв'язується задача лінійного програмування з обмеженнями, що не містять умови цілочисловості. Для розв'язання може бути використаний симплекс-метод (див. розд. 3). Якщо отриманий розв'язок є цілочисловим, то воно і є кінцевим розв'язком задачі. В іншому випадку, на другому етапі, необхідно ввести додаткові обмеження (січні площини), що породжують нову задачу лінійного програмування, розв'язок якої буде цілочисловим.

Розглянемо алгоритм Гоморі побудови таких додаткових обмежень. Необхідною умовою застосування цього алгоритму є цілочисловість усіх коефіцієнтів і правих частин обмежень задачі [6, 7].

Нехай при вирішенні задачі ЛЦП на першому етапі отримано останню симплекс-таблицю, яка відповідає оптимальному, але не цілочисловому розв'язку. У цій таблиці виберемо *i*-й рядок, у якому значення вільного коефіцієнта b_i має найбільшу дробову частину; цей рядок назвемо визначальним:

$$y_i = b_i - \left(a_{i1}x_1 + \ldots + a_{ik}x_k\right). \tag{4.1}$$

Запишемо всі коефіцієнти рівняння (4.1) як суму цілої і дробової частин:

$$b_i = \lfloor b_i \rfloor + \beta_i; \quad a_{ij} = \left(\lfloor a_{ij} \rfloor + \alpha_{ij}\right), \quad 0 < \beta_i < 1; \quad 0 \le \alpha_{ij} < 1,$$

де $A = \lfloor a \rfloor$ – найбільше ціле число, що відповідає умові $A \le a$;

α_{ij}, β_i – дробова частина коефіцієнтів a_{ij} та b_i відповідно.

Таким чином, рівняння (4.1) можна записати як

$$y_i = \lfloor b_i \rfloor + \beta_i - \left[\left(\lfloor a_{i1} \rfloor + \alpha_{i1} \right) x_1 + \ldots + \left(\lfloor a_{ik} \rfloor + \alpha_{ik} \right) x_k \right].$$

Перенесемо цілу частину вліво:

$$y_i - \lfloor b_i \rfloor + \left(\lfloor a_{i1} \rfloor x_1 + \ldots + \lfloor a_{ik} \rfloor x_k \right) = \beta_i - \left(\alpha_{i1} x_1 + \ldots + \alpha_{ik} x_k \right). \quad (4.2)$$

Оскільки ліва частина рівняння (4.2) містить тільки цілі змінні $y_i, x_1, \ldots, x_k$ (виходячи з умови задачі) та цілі коефіцієнти, то відповідна сума в лівій частині рівняння є цілочисловою, а значить, і права частина рівняння (4.2) теж повинна бути цілочисловою. Очевидно, що $\alpha_{ij} \ge 0$ (дробова частина коефіцієнтів a_{ij}) та $x_j \ge 0$ (за умовами задачі лінійного програмування), відповідно вираз у дужках у правій частині рівняння (4.2) також буде невід'ємним:

$$\left(\alpha_{i1} x_1 + \ldots + \alpha_{ik} x_k \right) \ge 0.$$

Звідси випливає, що права частина рівняння (4.2) буде менша за β_i, оскільки від β_i віднімається невід'ємне значення:

$$\beta_i - \left(\alpha_{i1} x_1 + \ldots + \alpha_{ik} x_k \right) \le \beta_i.$$

З огляду на те що права частина рівняння (4.2) строго менше одиниці (дробова частина b_i), а ліва частина – цілочислова, то це можливо тільки в тому випадку, коли виконується умова:

$$\beta_i - \left(\alpha_{i1} x_1 + \ldots + \alpha_{ik} x_k \right) \le 0$$

або

$$-\beta_i + \left(\alpha_{i1} x_1 + \ldots + \alpha_{ik} x_k \right) \ge 0.$$

Таким чином, в основну задачу ЛЦП може бути введено додаткове рівняння-обмеження:

$$s_1 = -\beta_i + \left(\alpha_{i1} x_1 + \ldots + \alpha_{ik} x_k \right).$$

Записавши його в стандартній формі, отримаємо

$$s_1 = -\beta_i - \left(-\alpha_{i1}x_1 + \ldots - \alpha_{ik}x_k\right) \qquad (4.3)$$

Рівняння (4.3) вводиться в симплекс-таблицю додатковим рядком, а далі нова задача лінійного програмування розв’язується симплекс-методом. Отриманий оптимальний розв’язок знову перевіряється на цілочисловість, і, за необхідності, в задачу ЛЦП вводяться додаткові обмеження.

Розглянемо застосування методу січних площин Гоморі на прикладі.

Умова задачі. На сортувальній станції виконується формування збірного поїзда на ділянку, на якій розташовані три проміжні станції (*А*, *Б*, *В*). У сортувальному парку станції є $n_1 = 18$ вагонів призначенням на *А*, $n_2 = 11$ вагонів на *Б* та $n_3 = 20$ вагонів на *В*, з яких необхідно вибрати $m = 32$ вагони і сформувати з них збірний поїзд. Норма часу на маневрові операції складає $t_1 = 6$ хв/ваг. (для станції *А*), $t_2 = 5$ хв/ваг. (для станції *Б*), $t_3 = 1$ хв/ваг. (для станції *В*). Загальний час маневрової роботи локомотива збірного поїзда на ділянці не повинен перевищувати $T = 93$ хв. Норма часу на формування групи на сортувальній станції – $\tau_1 = 3$ хв/ваг. (на станцію *А*), $\tau_2 = 1$ хв/ваг. (на станцію *Б*), $\tau_3 = 4$ хв/ваг. (на станцію *В*). Необхідно визначити кількість вагонів кожного призначення у складі збірного поїзда, щоб час його формування на сортувальній станції був мінімальним.

Розв’язання. Позначимо кількість вагонів у групах збірного поїзда призначенням на проміжні станції *А*, *Б*, *В* відповідно змінними x_1, x_2, x_3. Загальна кількість вагонів у трьох групах повинна дорівнювати складу поїзда:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 32 .$$

Кількість вагонів у кожній групі не може бути більшою, ніж їх накопичено на час формування, тобто

$$x_1 \le 18 , \; x_2 \le 11 , \; x_3 \le 20 .$$

Загальний час маневрової роботи локомотива збірного поїзда на проміжних станціях обмежений величиною *Т*, тому

$$6x_1 + 5x_2 + x_3 \le 93 .$$

Необхідно таким чином вибрати значення x_1, x_2, x_3, щоб загальний час формування збірного поїзда на сортувальній станції був мінімальним:

$$\tau = 3x_1 + x_2 + 4x_3 \to \min .$$

Для приведення задачі до ОЗЛП необхідно ввести додаткові змінні: y_1, y_2, y_3 – залишки вагонів на сортувальній станції призначенням відповідно на станції *А*, *Б* та *В*; y_4 – резерв часу маневрової роботи локомотива на проміжних станціях. Після цього система обмежень буде мати такий вигляд:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 32, \\ x_1 + y_1 = 18, \\ x_2 + y_2 = 11, \\ x_3 + y_3 = 20, \\ 6x_1 + 5x_2 + x_3 + y_4 = 93. \end{cases}$$

Наведена система обмежень має 5 рівнянь та 7 змінних, з яких 2 вільних та 5 базисних. Вільними змінними оберемо x_1 та x_2; тоді ОЗЛП в стандартній формі має такий вигляд:

$$\begin{cases} x_3 = 32 - \left(x_1 + x_2\right), \\ y_1 = 18 - x_1, \\ y_2 = 11 - x_2, \\ y_3 = -12 - \left(-x_1 - x_2\right), \\ y_4 = 61 - \left(5x_1 + 4x_2\right), \end{cases}$$

$$\tau = 128 - \left(x_1 + 3x_2\right) \to \min .$$

На першому етапі розв’язуємо задачу симплекс-методом (рис. 4.2).

Отриманий оптимальний розв’язок $x_1 = 3,4$ вагонів, $x_2 = 11$ вагонів, $x_3 = 17,6$ вагонів не є цілочисловим, тому реалізувати його практично неможливо. На другому етапі для отримання цілочислового розв’язку необхідно в існуючу систему ввести додаткове обмеження.

В останній симплекс-таблиці (див. рис. 4.2) оберемо рядок базисної змінної y_1, у якому величина вільного коефіцієнта $b_1 = 14,6$ має найбільшу дробову частину $\beta_1 = 0,6$. Запишемо відповідне рівняння-обмеження:

$$y_1 = 14,6 - \left(-0,2y_4 + 0,8y_2\right).$$

Розкладемо коефіцієнти цього рівняння на суми цілої та дробової частин: $14,6 = 14 + 0,6$; $-0,2 = -1 + 0,8$; $0,8 = 0 + 0,8$. Тоді додаткове рівняння-обмеження в стандартній формі (4.3) буде мати вигляд

$$s_1 = -0,6 - \left(-0,8 y_4 - 0,8 y_2\right).$$

Уведемо це обмеження додатковим рядком в останню симплекс-таблицю, що була отримана на першому етапі розв'язання задачі (див. рис. 4.2), та розв'яжемо нову задачу лінійного програмування симплекс-методом (рис. 4.3).

Ітерація I

	β	x_1	x_2
τ	-12 128	1 1	-1 3
x_3	-12 32	1 1	-1 1
y_1	-12 18	1 1	0 0
y_2	0 11	0 0	1 1
y_3	12 -12	-1 -1	-1 -1
y_4	-60 61	5 5	-5 4

Ітерація II

	β	y_3	x_2
τ	-22 116	0 1	-2 2
x_3	0 20	0 1	0 0
y_1	11 6	0 1	1 -1
y_2	11 11	0 0	1 1
x_1	-11 12	0 -1	-1 1
y_4	11 1	0 5	1 -1

Ітерація III

	β	y_1	y_4
τ	-2,4 94	-0,2 1	-0,2 -2
x_3	-2,4 20	-0,2 1	-0,2 0
x_1	-2,4 17	-0,2 1	-0,2 1
y_2	0 11	0 0	0 1
x_2	2,4 1	0,2 -1	0,2 -1
y_3	2,4 12	0,2 5	0,2 1

Оптимальне рішення

	β	y_4	y_2
τ	91,6	-0,2	-2,2
x_3	17,6	-0,2	-0,2
y_1	14,6	-0,2	0,8
x_2	11	0	1
x_1	3,4	0,2	-0,8
y_3	2,4	0,2	0,2

Рис. 4.2. Розв'язання задачі ЛЦП симплекс-методом (I етап)

Як видно з рис. 4.3, отриманий розв'язок $x_1 = 3,25$ вагонів, $x_2 = 11$ вагонів, $x_3 = 17,75$ вагонів знову не є цілочисловим, тому вводимо ще одне додаткове обмеження; при цьому для формування нового обмеження обираємо одну з базисних змінних x_3, y_1, або y_4 (величина дробової частини вільних коефіцієнтів у відповідних рівняннях дорівнює 0,75). Нове додаткове обмеження матиме вигляд:

$$s_2 = -0,75 - \left(-0,75 s_1 + 0 y_2\right).$$

Уведемо його в симплекс-таблицю додатковим рядком та розв'яжемо нову задачу симплекс-методом (рис. 4.4).

У результаті отриманий оптимальний цілочисловий розв'язок $x_1 = 3$, $x_2 = 11$, $x_3 = 18$, тобто на станцію *А* необхідно сформувати 3 вагони, на станцію *Б* – 11 вагонів, на станцію *В* – 18 вагонів. При цьому загальні витрати часу на формування збірного поїзда на сортувальній станції складуть $\tau = 3 \cdot 3 + 1 \cdot 11 + 4 \cdot 18 = 92$ хв. Слід зазначити, що значення критерію оптимальності τ, отримане в результаті розв'язання задачі ЛЦП методом січних площин, більше на 0,4 хв, ніж отримане на першому етапі (91,6 хв), але це кращий варіант з тих, що можуть бути практично реалізовані.

Модифікована таблиця 1

	β	y_4	y_2
τ	91,6	-0,2	-2,2
x_3	17,6	-0,2	-0,2
y_1	14,6	-0,2	0,8
x_2	11	0	1
x_1	3,4	0,2	-0,8
y_3	2,4	0,2	0,2
s_1	-0,6	-0,8	-0,8

Оптимальне рішення

	β	s_1	y_2
τ	91,75	-0,25	-2
x_3	17,75	-0,25	0
y_1	14,75	-0,25	1
x_2	11	0	1
x_1	3,25	0,25	-1
y_3	2,25	0,25	0
y_4	0,75	-1,25	1

Рис. 4.3. Модифікована симплекс-таблиця з додатковим обмеженням s_1 та результат розв'язання задачі симплекс-методом

Модифікована таблиця 2

	β	s_1	y_2
τ	91,75	-0,25	-2
x_3	17,75	-0,25	0
y_1	14,75	-0,25	1
x_2	11	0	1
x_1	3,25	0,25	-1
y_3	2,25	0,25	0
y_4	0,75	-1,25	1
s_2	-0,75	-0,75	0

Оптимальне рішення

	β	s_2	y_2
τ	92	-0,33	-2
x_3	18	-0,33	0
y_1	15	-0,33	1
x_2	11	0	1
x_1	3	0,33	-1
y_3	2	0,33	0
y_4	2	-1,67	1
s_1	1	-1,33	0

Рис. 4.4. Модифікована симплекс-таблиця з додатковим обмеженням s_2 та результат розв’язання задачі симплекс-методом

Контрольні запитання та завдання

1. Для розв’язання яких задач використовується цілочислове лінійне програмування?
2. Наведіть приклади задач цілочислового програмування.
3. Сформулюйте задачу лінійного цілочислового програмування.
4. Чому для отримання цілих значень змінних у задачах лінійного програмування не можна округлювати їх дробові значення?
5. У чому суть методу січних площин Гоморі при розв’язанні задач цілочислового лінійного програмування?
6. Поясніть загальний порядок розв’язання задач цілочислового лінійного програмування.
7. Наведіть загальний вигляд додаткового обмеження, яке вводиться в симплекс-таблицю при розв’язанні задач цілочислового лінійного програмування?
8. Яким чином при розв’язанні задач цілочислового лінійного програмування в симплекс-таблиці обирається рядок, для якого формується додаткове обмеження?

9. Розв’язати задачу цілочислового лінійного програмування та знайти максимальне значення цільової функції $C = 3x_1 - 2x_2$ при обмеженнях $2x_1 + 3x_2 \le 10$, $2x_1 + x_2 \le 8$, $x_1 - x_2 \ge 1$, $x_2 \le 2$.
10. Розв’язати задачу цілочислового лінійного програмування та знайти мінімальне значення цільової функції $C = 2x_1 - x_2 + x_3$ при обмеженнях $x_1 + 2x_2 - x_3 = 4$, $2x_1 - 3x_2 + 5 \ge 0$, $x_1 \le 3$, $x_3 \le 2$.
11. Розв’язати задачу цілочислового лінійного програмування та знайти мінімальне значення цільової функції $C = x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 - 3x_5 + x_6 - 2x_7$ при обмеженнях $x_1 - x_2 + x_3 = 4$, $2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + 5 = 0$, $x_1 + x_2 - x = 4$, $x_2 + x_6 = 5$, $2x_1 - 2x_2 - x_6 + 2x_7 = 7$.
12. Розв’язати задачу про формування збірного поїзда (див. п. 4.2) за таких вихідних даних: $n_1 = 10$ ваг., $n_2 = 11$, $n_3 = 16$ ваг., $m = 22$ ваг., $t_1 = 6$ хв/ваг., $t_2 = 9$ хв/ваг., $t_3 = 4$ хв/ваг., $T = 107$ хв., $\tau_1 = 6$ хв/ваг., $\tau_2 = 1$ хв/ваг., $\tau_3 = 3$ хв/ваг.
13. Розв’язати задачу про формування збірного поїзда (див. п. 4.2) за таких вихідних даних: $n_1 = 29$ ваг., $n_2 = 29$, $n_3 = 10$ ваг., $m = 27$ ваг., $t_1 = 7$ хв/ваг., $t_2 = 2$ хв/ваг., $t_3 = 1$ хв/ваг., $T = 91$ хв., $\tau_1 = 3$ хв/ваг., $\tau_2 = 7$ хв/ваг., $\tau_3 = 1$ хв/ваг.
14. Розв’язати задачу 27 з розд. 2 симплекс-методом за таких вихідних даних: $n_1 = 9$, $n_2 = 6$, $n_3 = 3$, $M = 160$ т, $q_1 = 10$ т, $q_2 = 12$ т, $q_3 = 14$ т, $T = 14$ год, $t_1 = 0{,}8$ год, $t_2 = 1{,}0$ год, $t_3 = 1{,}2$ год, $c_1 = 14$ грн, $c_2 = 12$ грн, $c_3 = 10$ грн. Врахувати умову цілочисловості отриманих результатів.
15. Розв’язати задачу 29 з розд. 2 симплекс-методом за таких вихідних даних: $n = 2$, $k = 2$, $Q_1 = 120$ т, $Q_2 = 110$ т, $q_{11} = 15$ т, $q_{12} = 10$ т, $q_{21} = 12$ т, $q_{22} = 18$ т, $t_1 = 1$ год, $t_2 = 1{,}5$ год, $T_1 = 10$ год, $T_2 = 12$ год, $c_{11} = 80$ грн, $c_{12} = 60$ грн, $c_{21} = 65$ грн, $c_{22} = 70$ грн. Врахувати умову цілочисловості отриманих результатів.
16. Розв’язати задачу 31 з розд. 2 симплекс-методом за таких вихідних даних: $T = 7$ год, $N_{50} = 800$ шт., $N_{65} = 1100$ шт., $q_{\text{К}-50} = 150$ т, $q_{\text{К}-65} = 175$ т, $q_{\text{А}-50} = 180$ т, $q_{\text{А}-65} = 200$ т,

$c_{\text{К}-50} = 20$ грн, $c_{\text{А}-50} = 30$ грн, $c_{\text{К}-65} = 25$ грн, $c_{\text{А}-65} = 32$ грн. Врахувати умову цілочисловості отриманих результатів.

17. Розв'язати задачу 32 з розд. 2 симплекс-методом за таких вихідних даних: $A = 8\,000$ пас., $N_{\text{МА}} = 12$, $N_{\text{СА}} = 7$, $N_{\text{ВА}} = 5$, $a_{\text{МА}} = 20$ пас., $a_{\text{СА}} = 40$ пас., $a_{\text{ВА}} = 60$ пас., $t_{\text{МА}} = 1$ год, $t_{\text{СА}} = 1{,}6$ год, $t_{\text{ВА}} = 2$ год, $C_{\text{МА}} = 3$ грн, $C_{\text{СА}} = 2$ грн, $C_{\text{ВА}} = 1{,}5$ грн, $K = 15$ %. Врахувати умову цілочисловості отриманих результатів.

РОЗДІЛ 5

Транспортна задача лінійного програмування

5.1. Постановка транспортної задачі

Умова задачі. Симплекс-метод розв'язання ОЗЛП є універсальним і може бути застосований для будь-яких задач такого типу. Однак існують деякі типи задач лінійного програмування, які допускають більш просте розв'язання. Такою є транспортна задача [1–3, 6, 7, 10, 11].

Класична транспортна задача лінійного програмування – це задача про найбільш економічний план перевезень однорідних (чи взаємно замінних) вантажів від пунктів виробництва (відправлення) до пунктів споживання (призначення). Іншими словами, це задача про оптимальне закріплення споживачів до постачальників.

Сформулюємо транспортну задачу у її класичній постановці [1].

Нехай є m пунктів відправлення (ПВ) $A_1, A_2, \ldots, A_m$, у яких сконцентровані запаси певного однорідного вантажу в кількості відповідно $a_1, a_2, \ldots, a_m$ одиниць. Також є n пунктів призначення (ПП) $B_1, B_2, \ldots, B_n$ з потребами у цьому вантажі відповідно $b_1, b_2, \ldots, b_n$ одиниць. Припускається, що загальні запаси вантажу дорівнюють загальним потребам в ньому $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$, тобто транспортна задача є збалансованою (або закритою). Відомі вартості c_{ij} перевезення одиниці вантажу від кожного ПВ A_i до кожного ПП B_j, що задані матрицею вартості:

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12}\dots c_{1j} & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22}\dots c_{2j} & c_{2n} \\ c_{m1} & c_{m2}\dots c_{mj} & c_{mn} \end{vmatrix}$$

Необхідно скласти такий план перевезень, при якому всі запаси вантажу з пунктів відправлення були б вивезені, усі потреби у вантажі в пунктах призначення були б задоволені, а загальна вартість перевезень була б мінімальна. Така постановка являє собою транспортну задачу за критерієм вартості.

Формалізація задачі. Позначимо як x_{ij} – кількість вантажу, що відправляється з *i*-го пункту відправлення A_i в *j*-й пункт призначення B_j. Невід’ємні значення x_{ij} (загальна кількість яких $m \times n$) повинні задовольняти такі умови (обмеження):

– загальна кількість вантажу, що направляється з кожного пункту відправлення в усі пункти призначення, повинна дорівнювати відповідним запасам вантажу;

– загальна кількість вантажу, що доставляється в кожний пункт призначення з усіх пунктів відправлення, повинна дорівнювати відповідним потребам у вантажі.

Вказані умови можна математично записати як

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} x_{1j} = a_1, \\ \sum\limits_{j=1}^{n} x_{2j} = a_2, \\ \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \\ \sum\limits_{j=1}^{n} x_{mj} = a_m, \end{cases} \quad \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{m} x_{i1} = b_1, \\ \sum\limits_{i=1}^{m} x_{i2} = b_2, \\ \sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \\ \sum\limits_{j=1}^{m} x_{in} = b_n. \end{cases} \tag{5.1}$$

Загальна вартість всіх перевезень повинна бути мінімальною, тобто: $C = \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij} \to \min$.

Очевидно, що цільова функція C та обмеження (5.1) лінійні, тобто це є типова задача лінійного програмування. Однак нижчевказані особливості транспортної задачі дозволяють розв'язати її більш простим способом, ніж симплекс-метод:

– усі коефіцієнти при змінних в обмеженнях (5.1) дорівнюють одиниці;

– не всі з $m+n$ рівнянь (5.1) є незалежними, оскільки $\sum a_i = \sum b_j$; таким чином, у транспортній задачі кількість базисних змінних $m+n-1$, а кількість вільних змінних

$$mn-(m+n-1)=(m-1)(n-1).$$

Основні визначення. Значення x_{ij} одиниць вантажу, що направляється з пункту відправлення A_i в пункт призначення B_j, називається *перевезенням*.

Будь-яка сукупність значень x_{ij} називається *планом перевезень*.

План перевезень є *допустимим*, якщо він задовольняє балансовим умовам (5.1), тобто всі запаси вантажу вивезені, усі потреби у вантажі задовільнені.

Допустимий план перевезень називається *опорним*, якщо в ньому ненульових перевезень $r=m+n-1$, а інші перевезення дорівнюють нулю.

План перевезень називається *оптимальним*, якщо він серед усіх допустимих планів призводить до найменшої загальної вартості перевезень.

Слід наголосити, що, на відміну від ОЗЛП, розв'язок транспортної задачі завжди існує.

5.2. Розв'язання транспортної задачі табличним способом

Транспортна таблиця. На відміну від симплекс-методу, розв'язання транспортної задачі зводиться до більш простих операцій, які виконуються в таблиці, що називається *транспортною* (рис. 5.1). У такій таблиці в певному порядку записують умови транспортної задачі, а саме [1–3]:

– пункти відправлення A_i та пункти призначення B_j. При цьому кожному з m рядків ставиться у відповідність певний пункт відправлення A_i, а кожному з n стовпчиків – певний пункт призначення B_j;

– запаси вантажу a_i, що є в кожному ПВ A_i, записуються в останньому стовпчику, а потреби у вантажі b_j, що є в кожному ПП B_j, – в останньому рядку;

– вартість перевезення c_{ij} одиниці вантажу між кожним ПВ A_i та ПП B_j вказується у верхньому лівому кутку клітини на перетині i-го рядка та j-го стовпчика;

– кількість одиниць вантажу x_{ij}, що перевозиться з ПВ A_i в ПП B_j, записується у відповідній клітині у правому нижньому куті.

	B_1	B_2	...	B_j	...	B_n	Запаси a_i
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}		c_{1j} x_{1j}		c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}		c_{2j} x_{2j}		c_{2n} x_{2n}	a_2
…							…
A_i	c_{i1} x_{i1}	c_{i2} x_{i2}		c_{ij} x_{ij}		c_{in} x_{in}	a_i
…							…
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}		c_{mj} x_{mj}		c_{mn} x_{mn}	a_m
Потреби b_j	b_1	b_2	…	b_j	…	b_n	$\sum a_i = \sum b_j$

Рис. 5.1. Загальний вигляд транспортної таблиці

Клітини транспортної таблиці, у яких записані відмінні від нуля перевезення $\left(x_{ij} > 0\right)$, називаються *базисними*, інші (порожні) – *вільні* $\left(x_{ij} = 0\right)$. Кількість базисних клітин в опорному, а значить, і в оптимальному, плані перевезень має бути $r = m + n - 1$.

Таким чином, розв'язання транспортної задачі в табличній формі зводиться до такого. Необхідно знайти такі невід'ємні значення перевезень (базисних змінних), які б задовольняли такі умови:

– сума перевезень по кожному *i*-му рядку транспортної таблиці повинна дорівнювати запасам вантажу a_i у цьому пункті відправлення A_i;

– сума перевезень по кожному *j*-му стовпчику повинна дорівнювати потребам b_j відповідного пункту призначення B_j;

– загальна вартість усіх перевезень повинна бути мінімальною, тобто

$$L = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij} \to \min .$$

Транспортна задача з порушенням балансу. Якщо сумарні запаси вантажу в пунктах відправлення не збігаються із сумарними потребами в цьому вантажі в пунктах призначення, то маємо відкриту (незбалансовану) транспортну задачу. Відкриту транспортну задачу зводять до закритої (збалансованої) шляхом введення фіктивного пункту призначення або фіктивного пункту відправлення [1, 3, 11].

Транспортна задача з надлишком запасів: $\sum a_i > \sum b_j$. У цьому випадку вводять фіктивний пункт призначення $B_ф$ (додатковий стовпчик у транспортній таблиці) з потребами: $b_ф = \sum a_i - \sum b_j$; вартість перевезення одиниці вантажу у фіктивний пункт призначення $c_{iф} = 0$. Перевезення $x_{iф} > 0$ з A_i в $B_ф$ означає, що в пункті відправлення A_i залишилися невикористані запаси вантажу у кількості $x_{iф}$ одиниць.

Транспортна задача з надлишком потреб: $\sum b > \sum a_i$. У цьому випадку вводять фіктивний пункт відправлення $A_ф$ (додатковий рядок у транспортній таблиці) із запасами: $a_ф = \sum b_j - \sum a_i$; вартість перевезення одиниці вантажу з фіктивного пункту відправлення $c_{jф} = 0$. Перевезення $x_{jф} > 0$ з $A_ф$ у B_j означає, що в пункті призначення B_j частина потреб у розмірі $x_{jф}$ одиниць вантажу залишилась непокритою.

Знаходження опорного плану перевезень у транспортній таблиці. Пошук оптимального розв'язку транспортної задачі починається з опорного плану перевезень. Існує декілька методів знаходження опорного (початкового) плану перевезень:

– метод північно-східного кута – застосовується в основному під час виконання розрахунків на ЕОМ, оскільки добре алгоритмізований, але отриманий таким способом опорний план перевезень найбільш далекий від оптимального;

– метод найменшої вартості;

– метод Фогеля;

– метод подвійної переваги – дозволяє отримати план перевезень, досить близький до оптимального, і скоротити обсяг розрахунків порівняно з методом північно-східного кута у середньому на 20–25 %.

Суть усіх вказаних методів у тому, щоб розподілити всі запаси вантажу і задовольнити всі потреби в ньому, при цьому кількість базисних (зайнятих) клітин має бути $r = m + n - 1$.

Одним з найбільш ефективних та простих є метод подвійної переваги, суть якого така [2]. У кожному з рядків транспортної таблиці необхідно знайти клітину з мінімальною вартістю, позначити її знаком «*». Потім те саме потрібно виконати в кожному стовпчику. Певні клітини (відзначені «**») мають мінімальні значення як по рядку, так і по стовпчику. У такі клітини записуються максимально можливі перевезення, виключаючи при цьому з розгляду після кожного запису x_{ij} відповідно рядок або стовпчик. Далі в частині матриці, що залишилася, записуються максимально можливі перевезення в клітини, відзначені знаком «*». Після цього заповнюються невідмічені клітини.

Порядок знаходження опорного плану перевезень методом подвійної переваги розглянемо на прикладі (табл. 5.1). Позначимо «*» в кожному рядку таблиці клітину з найменшою вартістю, те саме зробимо в кожному стовпчику таблиці.

Таблиця 5.1

Знаходження опорного плану перевезень (етап 1)

	B_1	B_2	B_3	Запаси
A_1	5	3**	7	20
A_2	4**	6	5*	50
A_3	8	4*	6	30
Потреби	40	25	35	100

У першу чергу поставимо перевезення в ті клітини, що позначені «**». Наприклад, для клітини A_1B_2 (табл. 5.2) величину перевезення визначаємо за мінімумом серед запасів по рядку A_1 (20) та потреб по стовпчику B_2 (25). Отже, у клітину A_1B_2 записується значення 20; при цьому всі запаси з A_1 вивезено, а у пункті B_2 залишається $25-20=5$ одиниць вантажу. Аналогічно заповнюємо клітину A_2B_1 – $\min\{50, 40\}=40$; при цьому в B_1 усі потреби задоволені, а у A_2 залишається $50-40=10$ одиниць вантажу.

Таблиця 5.2

Знаходження опорного плану перевезень (етап 2)

	B_1	B_2	B_3	Запаси
A_1	5	3** **20**	7	~~20~~
A_2	4** **40**	6	5*	~~50~~ 10
A_3	8	4*	6	30
Потреби	~~40~~	~~25~~ 5	35	100

Далі заповнюються клітини, що позначені «*». Так, у клітину A_3B_2 записуємо $\min\{30, 5\}=5$, а у клітину A_2B_3 записуємо $\min\{10, 35\}=10$ (табл. 5.3).

На останньому етапі заповнюються невідмічені клітини таблиці таким чином, щоб усі залишки запасів було вивезено, а всі потреби задоволено. Такою клітиною є A_3B_3 (табл. 5.4); при встановленні для неї перевезення у розмірі 25 одиниць повністю вивозяться запаси з A_3 та повністю задовольняються потреби в пункті B_3.

Оскільки в табл. 5.4 кількість заповнених (базисних) клітин становить $m+n-1=3+3-1=5$, то отриманий план перевезень є опорним.

Якщо кількість базисних клітин в отриманому плані перевезень більше $m+n-1$, то при складанні початкового плану були допущені помилки; якщо кількість базисних клітин менше $m+n-1$, то наявний *випадок виродження* початкового плану перевезень [1, 3, 11]. Виродження може статись, якщо призначення певного перевезення призводить до одночасного виключення рядка і стовпчика транспортної таблиці. Однак для подальшого розв'язання транспортної задачі необхідно збільшити кількість базисних клітин до $m+n-1$, уводячи «штучні нульові перевезення». При цьому порядок дій такий [11].

Таблиця 5.3

Знаходження опорного плану перевезень (етап 3)

	B_1	B_2	B_3	Запаси
A_1	5	3** **20**	7	~~20~~
A_2	4** **40**	6	5* **10**	~~50~~ ~~10~~
A_3	8	4* **5**	6	~~30~~ 25
Потреби	~~40~~	~~25~~ 5	~~35~~ 25	100

Таблиця 5.4

Знаходження опорного плану перевезень (етап 4)

	B_1	B_2	B_3	Запаси
A_1	5	3** **20**	7	~~20~~
A_2	4** **40**	6	5* **10**	~~50~~ ~~10~~
A_3	8	4* **5**	6 **25**	~~30~~ ~~25~~
Потреби	~~40~~	~~25~~ ~~5~~	~~35~~ ~~25~~	100

Клітина, при заповненні якої в транспортній таблиці одночасно виключаються і рядок, і стовпчик, помічається буквою *П*. Далі транспортна таблиця заповнюється методом подвійної переваги; остання заповнена клітина таблиці помічається буквою *К*. «Штучне нульове перевезення» призначається в клітину, яка розташована на перетині рядка з міткою *П* та стовпчика з міткою *К* або стовпчика з міткою *П* та рядка з міткою *К*.

Знаходження оптимального плану перевезень методом потенціалів. Побудований опорний план перевезень необхідно перевірити на оптимальність. Це можна виконати за допомогою *методу потенціалів* [1–3, 11].

Потенціали являють собою умовну суму, яку вносить кожний з пунктів призначення A_i (потенціал U_i) та кожний з пунктів призначення B_j (потенціал V_j) за перевезення одиниці вантажу деякому перевізнику. Усього потенціалів $m+n$.

При розрахунку потенціалів значення одного з них приймається довільним (звичайно, нуль). Значення інших потенціалів розраховується за базисними (заповненими) клітинами таким чином, щоб для всіх базисних клітин виконувалась умова

$$U_i + V_j = c_{ij}. \quad (5.2)$$

Розглянемо порядок розрахунку потенціалів на прикладі (табл. 5.5).

Таблиця 5.5

Приклад розрахунку потенціалів

		$V_1 = 4$	$V_2 = 3$	$V_3 = 5$	
		B_1	B_2	B_3	Запаси
$U_1 = 0$	A_1	5	3 **20**	7	20
$U_2 = 0$	A_2	4 **40**	6	5 **10**	50
$U_3 = 1$	A_3	8	4 **5**	6 **25**	30
	Потреби	40	25	35	100

Призначимо в табл. 5.5 потенціал для рядка A_2 $U_2 = 0$; за базисними клітинами рядка A_2 розрахуємо потенціали для стовпчиків B_1 та B_3, виходячи з умови (5.2):

$$V_1 = c_{21} - U_2 = 4 - 0 = 4, \quad V_3 = c_{23} - U_2 = 5 - 0 = 5.$$

Далі за базисними клітинами з використанням уже розрахованих потенціалів визначаємо значення всіх інших потенціалів. Так, потенціал U_3 визначаємо за клітиною A_3B_3: $U_3 = c_{33} - V_3 = 6 - 5 = 1$, потенціал V_2 визначимо за клітиною A_3B_2: $V_2 = c_{32} - U_3 = 4 - 1 = 3$, а потенціал U_1 – за клітиною A_1B_2: $U_1 = c_{12} - V_2 = 3 - 3 = 0$.

План перевезень буде оптимальним, якщо для всіх базисних клітин виконується умова (5.2), а для всіх вільних клітин – умова

$$U_i + V_j \le c_{ij}. \tag{5.3}$$

Якщо умова (5.3) не виконується, то отримане розв'язок (план перевезень) необхідно покращити. Для цього потрібно перерозподілити перевезення таким чином, щоб клітина з найбільшим порушенням умови (5.3) була включена в план перевезень, тобто стала базисною. Однак, поява перевезення у вільній клітині повинна компенсуватися зміною значень в інших базисних клітинах. З цією метою будується спеціальний цикл перерахування:

1) цикл перерахування будується, починаючи з вільної клітини, де порушення умови (5.3) буде максимальним, тобто: $U_i + V_j - c_{ij} = \max$. Цикл будується таким чином, щоб усі його вершини, крім початкової, розміщувалися в базисних (зайнятих) клітинах. При цьому в кожній вершині виконується поворот на $90°$. Цикли можуть набувати різних форм (рис. 5.2);

2) вільна клітина, що вводиться в план перевезень, помічається знаком «+». Далі по черзі помічаються всі базисні клітини циклу знаками «–» та «+»;

3) клітина, яка помічена знаком «–» і має найменше значення перевезення X^*, повинна бути виключена з базису й стати вільною;

4) обсяг перевезень в клітинах, помічених знаком «+», збільшується на величину X^*, а в клітинах, помічених знаком «–», зменшується на цю величину.

Приклад перерахунку наведено на рис. 5.3.

Після перерозподілу перевезень і зміни базису будується нова транспортна таблиця (план перевезень), яка знову перевіряється на оптимальність методом потенціалів.

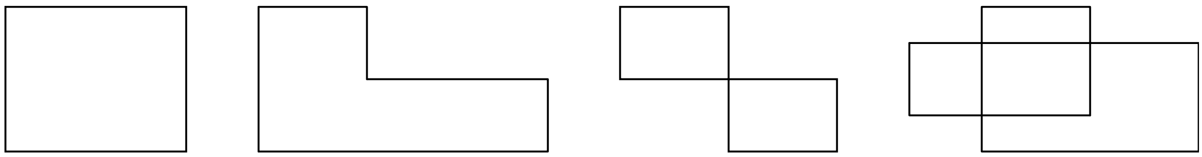


Рис. 5.2. Можливі форми циклу перерахування

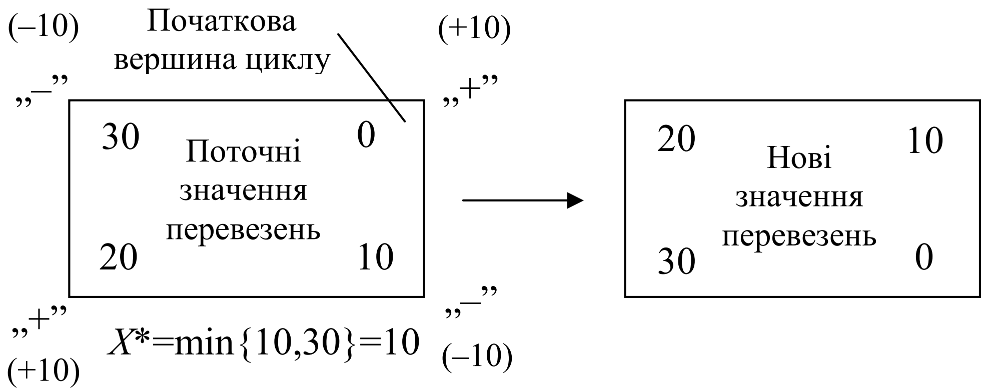


Рис. 5.3. Приклад циклу перерахунку

Умова задачі. На транспортній мережі є $m = 5$ пунктів відправлення $A_1, A_2, \ldots, A_m$ однорідного вантажу, у яких розміщені задані запаси цього вантажу; є також $n = 4$ пунктів призначення цього вантажу $B_1, B_2, \ldots, B_n$, в кожному з яких відомі потреби у вантажі. Відома також вартість c_{ij} перевезення одиниці вантажу з кожного пункту відправлення в кожний пункт призначення. Необхідно скласти такий план перевезень вантажу, при якому загальна вартість усіх перевезень буде мінімальною. Вихідні дані наведено в табл. 5.6.

Розв'язання. Перевіримо баланс перевезень транспортної задачі. Загальні запаси дорівнюють: $\sum a_i = 240 + 180 + 240 + 120 + 50 = 830$ одиниць; загальні потреби становлять: $\sum b_i = 120 + 110 + 200 + 250 = 680$ одиниць. Оскільки $\sum a_i > \sum b_i$ ($830 > 680$), то необхідно ввести фіктивний пункт призначення $B_ф$ з потребами $b_ф = 830 - 680 = 150$ одиниць та нульовою вартістю перевезень у цей пункт.

Знайдемо опорний план перевезень за допомогою методу подвійної переваги та перевіримо його на оптимальність (рис. 5.5).

Отримане розв’язок (див. рис. 5.5) є опорним, оскільки кількість зайнятих клітин у цій транспортній таблиці дорівнює $m+n-1=5+5-1=9$ (де m та n – відповідно кількість рядків та стовпчиків транспортної таблиці з урахуванням фіктивних). При цьому загальна вартість усіх перевезень становить:

$$C_1 = 3\cdot 240 + 2\cdot 120 + 6\cdot 60 + 8\cdot 90 + 5\cdot 10 + 0\cdot 140 + 3\cdot 110 + 0\cdot 10 +$$
$$+5\cdot 50 = 2\,670 \text{ одиниць.}$$

Таблиця 5.6

Вихідні дані до транспортної задачі

Пункти відправлення	Пункти призначення				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	4	6	10	3	240
A_2	2	8	6	10	180
A_3	6	12	8	5	240
A_4	5	3	6	7	120
A_5	10	9	5	6	50
Потреби	120	110	200	250	–

Виконана методом потенціалів перевірка показала, що отриманий розв’язок є оптимальним, оскільки в таблиці є одна вільна клітина, для якої не дотримується умова (5.3) – на рис. 5.5 ця клітина виділена (A_4B_3); для неї побудовано цикл перерахування, який наведено на рис. 5.4. та 5.5.

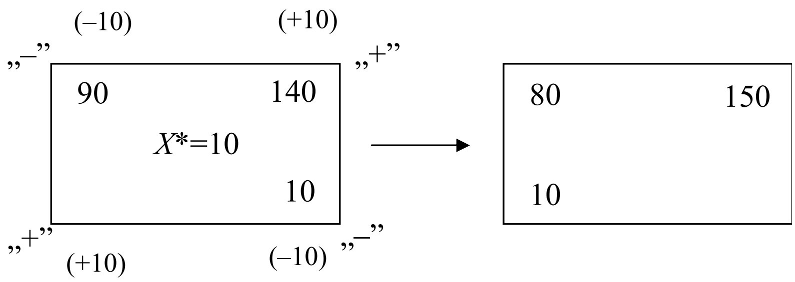


Рис. 5.4. Перерахунок перевезень у циклі

З урахуванням отриманих нових значень перевезень для клітин A_4B_3, A_3B_3, $A_3B_ф$ та $A_4B_ф$ (10; 80; 150; 0) складемо нову транспортну таблицю та знову виконаємо її перевірку методом потенціалів (рис. 5.6).

Вартість перевезення c_{ij}

Сума потенціалів $U_i + V_j$: -2 + 4 = 2

Зайнята клітина

Фіктивний пункт призначення

Потенціали	V_j	4	3	8	5	0	**Запаси**
U_i		**B_1**	**B_2**	**B_3**	**B_4**	**$B_ф$**	
-2	**A_1**	4 2	6 1	10 6	3** 3 **240**	0 -2	240
-2	**A_2**	2** 2 **120**	8 1	6 6 **60**	10 3	0 -2	180
0	**A_3**	6 4	12 3	8 8 **90**	5* 5 **10**	0 0 **140**	240
0	**A_4**	5 4	3** 3 **110**	6 8	7 5	0 0 **10**	120
-3	**A_5**	10 1	9 0	5** 5 **50**	6 2	0 -3	50
	Потреби	120	110	200	250	150	830

Вільна клітина

Клітина, для якої $U_i + V_j - c_{ij} = \max$

Цикл перерахування

Рис. 5.5. Приклад розв’язання транспортної задачі

Потенціали	V_j	4	5	8	5	0	**Запаси**
U_i		**B_1**	**B_2**	**B_3**	**B_4**	**$B_ф$**	
-2	**A_1**	4 2	6 3	10 6	3 3 **240**	0 -2	240
-2	**A_2**	2 2 **120**	8 3	6 6 **60**	10 3	0 -2	180
0	**A_3**	6 4	12 5	8 8 **80**	5 5 **10**	0 0 **150**	240
-2	**A_4**	5 2	3 3 **110**	6 6 **10**	7 3	0 -2	120
-3	**A_5**	10 1	9 2	5 5 **50**	6 2	0 -3	50
–	**Потреби**	120	110	200	250	150	830

Рис. 5.6. Оптимальний план перевезень

Оскільки для всіх клітин нової транспортної таблиці (див. рис. 5.6) виконуються умови (5.2) та (5.3), то отриманий план перевезень є оптимальним; при цьому загальна вартість перевезень буде мінімальною і становить

$$C_2 = 3 \cdot 240 + 2 \cdot 120 + 6 \cdot 60 + 8 \cdot 80 + 5 \cdot 10 + 0 \cdot 150 + 3 \cdot 110 + 6 \cdot 10 + \\ + 5 \cdot 50 = 2\,650 \text{ одиниць}$$

Отримане рішення транспортної задачі (див. рис. 5.6) є кращим від початкового (див. рис. 5.4), оскільки забезпечує зменшення загальних витрат на $2\,670 - 2\,650 = 20$ одиниць.

Транспортна задача може бути вирішена з використанням електронних таблиць MS Excel (див. дод. А).

Обов'язкові та заборонені перевезення у транспортній задачі. У практичних задачах можуть траплятися випадки, коли між деякими пунктами відправлення та призначення перевезення вже встановлені наперед (обов'язкові перевезення), наприклад, відповідно до укладених договорів або вказівок керівних органів. У цих випадках під час розв'язання транспортної задачі обсяги відправлення та прибуття для відповідних пунктів зменшують на величину обов'язкової кореспонденції, а перевезення обсягів вантажу, що залишились, планують методом потенціалів [8].

Окремі ж кореспонденції можуть бути заборонені до перевезення з певних причин, наприклад, при перевезенні вантажів, що мають різний сортамент (пісок, вугілля тощо). Скажімо, будівельний пісок буває річковий та кар'єрний – одні споживачі не приймають річковий пісок, а інші – кар'єрний, більшість же споживачів приймають будь-який пісок. У тому випадку, коли певну кореспонденцію з пункту A_i в пункт B_j необхідно заборонити, у відповідній клітині транспортної таблиці замість заданої вартості перевезень c_{ij} встановлюють деяке досить велике значення M_{ij}. Розв'язуючи задачу методом потенціалів, умову оптимальності (5.3) у таких клітинах не перевіряють. Таким же способом можна виключити заздалегідь не раціональні перевезення [8].

5.3. Транспортна задача з проміжними пунктами

Постановка задачі. Узагальненням транспортної задачі є транспортна задача з проміжними (транзитними) пунктами (ТЗПП). Така модель досить часто наявна на практиці, коли між постачальниками та споживачами є певні пункти-посередники, наприклад, склади, які розподіляють продукцію безпосередньо споживачам (рис. 5.7). Причому певні проміжні пункти можуть мати як власні запаси вантажу, так і власні потреби в ньому, що також відповідає реальним умовам, оскільки деякі склади мають надлишок певної продукції, а на інших складах може існувати потреба в поповненні необхідного рівня в обсягах продукції, яка на них зберігається [3, 8, 10].

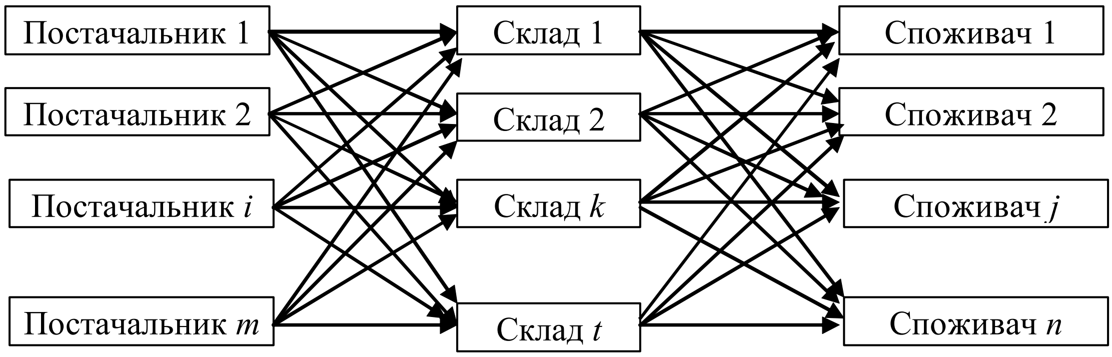


Рис. 5.7. Схема транспортної мережі з проміжними пунктами

Виконаємо постановку транспортної задачі з проміжними пунктами. Нехай на транспортній мережі є m пунктів постачання $A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots, A_m$, у яких сконцентровані запаси певного однорідного вантажу в кількості відповідно $a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots, a_m$ одиниць. Є n пунктів споживання $B_1, B_2, \ldots, B_j, \ldots, B_n$ з потребами у цьому вантажі відповідно $b_1, b_2, \ldots, b_j, \ldots, b_n$ одиниць. Мережа також включає t проміжних пунктів $C_1, C_2, \ldots, C_k, \ldots, C_t$ з додатковими потребами у вантажі відповідно $c_1, c_2, \ldots, c_k, \ldots, c_t$ одиниць, причому, якщо $c_k > 0$, то в пункті C_k є надлишок вантажу, а якщо $c_k < 0$, то в пункті C_k є потреба у вантажі. Відома вартість d_{ik} перевезень одиниці вантажу від кожного постачальника A_i до кожного з проміжних пунктів C_k, а також вартість q_{kj} перевезення одиниці вантажу від кожного проміжного пункту C_k до кожного споживача B_j.

Необхідно знайти такий план перевезень, щоб усі запаси та надлишки вантажу були вивезені, усі потреби у вантажі були покриті, а загальна вартість перевезень при цьому була мінімальною.

Формалізація задачі. Позначимо як x_{ik} – кількість вантажу, що відправляється від *i*-го постачальника A_i в *k*-й проміжний пункт C_k, а y_{kj} – кількість вантажу, що відправляється з *j*-го проміжного пункту C_k до *j*-го постачальника B_j. Невід'ємні значення x_{ij} хij та y_{kj} повинні задовольняти такі умови (обмеження):

– загальна кількість вантажу, що направляється від кожного постачальника в усі проміжні пункти, повинна дорівнювати відповідним запасам вантажу для цього постачальника;

– загальна кількість вантажу, що доставляється кожному споживачу з усіх проміжних пунктів, повинна дорівнювати відповідним потребам для цього споживача.

Вказані умови можна математично записати як

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{t} x_{1k} = a_1, \\ \sum_{k=1}^{t} x_{2k} = a_2, \\ \sum_{k=1}^{t} x_{ik} = a_i, \\ \sum_{k=1}^{t} x_{mk} = a_m, \end{cases} \quad \begin{cases} \sum_{k=1}^{t} y_{k1} = b_1, \\ \sum_{k=1}^{t} y_{k2} = b_2, \\ \sum_{k=1}^{t} y_{kj} = b_j, \\ \sum_{k=1}^{t} y_{kn} = b_n; \end{cases}$$

– загальна кількість вантажу, яка вивозиться від постачальників та з проміжних пунктів, повинна дорівнювати загальним потребам у вантажі у пунктах споживання та у проміжних пунктах (збалансована транспортна задача):

$$\sum_{i=1}^{m} a_i + \sum_{\substack{k=1 \\ c_k > 0}}^{t} c_k = \sum_{j=1}^{m} b_j + \sum_{\substack{k=1 \\ c_k < 0}}^{t} | c_k |.$$

Загальна вартість усіх перевезень повинна бути мінімальною, тобто:

$$C=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{t}d_{ik}\cdot x_{ik}+\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{t}q_{kj}\cdot y_{kj}\to\min.$$

Порядок розв’язання транспортної задачі з проміжними пунктами. Транспортна задача з проміжними пунктами може досить просто бути приведена до еквівалентної їй транспортної задачі у класичній постановці (див. п. 5.1) та розв’язана методом потенціалів. Порядок приведення ТЗПП до класичної постановки такий [3, 8].

Серед усіх транспортних пунктів ТЗПП (постачальників, споживачів та проміжних пунктів) виділяють:

– дійсні пункти відправлення, які передбачають можливість тільки відправлення вантажу та мають його запаси;

– дійсні пункти призначення, які здійснюють тільки прийом вантажу та мають потреби в ньому;

– транзитні пункти, які передбачають можливість як прийому, так і відправлення вантажу.

Введемо поняття буфера – це фіктивний запас вантажу в кожному проміжному (транзитному) пункті, наявність якого забезпечує пропуск через цей транзитний пункт необхідного вантажопотоку.

Величина запасів та потреб для вказаних пунктів визначається таким чином:

– запаси для дійсного пункту відправлення $A_i^{д}$ дорівнюють обсягам вихідних запасів a_i у відповідному пункті постачання;

– запаси для транзитного пункту C_k визначаються як сума вихідних запасів (надлишків) вантажу $c_k>0$ та величини буфера *Z*;

– потреби для дійсного пункту призначення $B_j^{д}$ дорівнюють обсягам вихідних потреб b_j у відповідному пункті постачання;

– потреби для транзитного пункту C_k визначаються як сума вихідних додаткових потреб у вантажі $c_k<0$ та величини буфера *Z*.

Величина буфера *Z* повинна бути достатньою, щоб вмістити обсяги всіх запасів та надлишків (або усіх потреб):

$$Z=\sum_{i=1}^{m}a_i+\sum_{\substack{k=1\\c_k>0}}^{t}c_k=\sum_{j=1}^{m}b_j+\sum_{\substack{k=1\\c_k<0}}^{t}|\,c_k\,|.$$

Розв'язання ТЗПП виконується в транспортній таблиці. У ній для кожного дійсного пункту відправлення виділяється окремий рядок, для кожного дійсного пункту призначення – окремий стовпчик, для кожного транзитного пункту виділяється і рядок, і стовпчик.

Якщо між двома пунктами транспортної мережі перевезення неможливе (наприклад, відсутній прямий шлях), то величина відповідної вартості перевезення встановлюється на порядок більшою, ніж величина всіх інших вартостей. Вартість перевезення для клітин таблиці, які розташовані на перетині рядка та стовпчика одного транзитного пункту, приймається нульовою. Ненульове значення перевезення ($x_{kk} > 0$) у такій клітині означає, що через неї проходить вантажопотік обсягом $Z - x_{kk}$.

Отримана транспортна таблиця розв'язується методом потенціалів (п. 5.2).

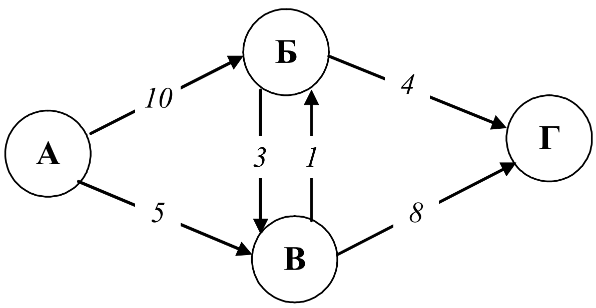


Рис. 5.8. Умова транспортної задачі з проміжними пунктами

Умова задачі. Транспортна мережа включає чотири пункти (рис. 5.8). Запаси деякого вантажу в пунктах **А** та **Б** становлять відповідно 20 та 5 одиниць; потреби у вантажі в пунктах **В** та **Г** становлять відповідно 8 та 17 одиниць. Вартість перевезення одиниці вантажу між пунктами задана на відповідних дугах транспортної мережі. Необхідно скласти план, що забезпечує мінімальну загальну вартість перевезень вантажу від постачальників до споживачів.

Розв'язання. Перевіримо баланс перевезень заданої транспортної мережі. Загальні запаси вантажу складають $20+5=25$ одиниць, а загальні потреби у вантажі $8+17=25$ одиниць, отже, задача є збалансованою.

Приведемо цю задачу з транзитними пунктами до класичної транспортної задачі. Визначаємо величину буфера: $Z = 25$ одиниць. Встановлюємо тип кожного пункту заданої транспортної мережі:

– пункт **А** є дійсним пунктом відправлення та має запаси 20 одиниць;

– пункт **Б** є транзитним пунктом та має запаси розміром $5+Z=5+25=30$ одиниць, а потреби – розміром $0+Z=0+25=25$ одиниць;

– пункт **В** є транзитним пунктом та має запаси розміром $0+Z=0+25=25$ одиниць, а потреби – розміром $8+Z=8+25=33$ одиниці;

– пункт **Г** є дійсним пунктом призначення та має потреби 17 одиниць.

Транспортна таблиця, що еквівалента вихідній задачі, наведена на рис. 5.9. Оскільки між пунктами **А** та **Г** не існує прямого зв'язку, то значення відповідної вартості встановлене 100.

	Б	**В**	**Г**	**Запаси**
А	10	5	100	20
Б	0	3	4	30
В	1	0	8	25
Потреби	25	33	17	75

Рис. 5.9. Транспортна таблиця, що еквівалентна транспортній задачі з проміжними пунктами

Знайдемо опорний план перевезень, наприклад, методом північно-західного кута. При цьому спочатку перевезення ставиться у верхню ліву клітину **АБ** – $x_{\text{АБ}} = 20$. Далі клітини таблиці заповнюються відповідно до залишків запасів у рядках або залишків потреб у стовпчиках. Так, у цьому прикладі наступною заповнюється клітина **ББ** – $x_{\text{ББ}} = 5$ (залишок по стовпчику **Б**), потім клітина **БВ** – $x_{\text{БВ}} = 25$ (залишок по рядку **Б**). Інші клітини заповнюються аналогічно. Опорний план перевезень наведено на рис. 5.10. Реалізація цього плану на транспортній мережі наведена на рис. 5.11.

Загальна вартість перевезень для опорного плану складає

$$C_1 = 10 \cdot 20 + 3 \cdot 5 + 8 \cdot 17 = 411 \text{ одиниць.}$$

		$U_{\text{Б}}$=10	$U_{\text{В}}$=13	$U_{\text{Г}}$=21	**Запаси**
		Б	**В**	**Г**	
$V_{\text{А}}$=0	**А**	10 10 «–» **20**	5 13 «+»	100 21	20
$V_{\text{Б}}$=-10	**Б**	0 0 «+» **5**	3 3 «–» **25**	4 11	30
$V_{\text{В}}$=-13	**В**	1 -3	0 0 **8**	8 8 **17**	25
	Потреби	25	33	17	75

Рис. 5.10. Опорний план перевезень транспортної задачі з проміжними пунктами

Для перевірки оптимальності опорного плану перевезень розраховано потенціали для кожного транспортного пункту (див. п. 5.2.4); відповідні значення V_i та U_j наведено на рис. 5.10. Як показує аналіз, отриманий опорний план перевезень не є оптимальним, оскільки для вільних клітин **АВ** та **БГ** умова (5.3) не виконується: $V_{\text{А}} + U_{\text{В}} > c_{\text{АВ}}$ $(0+13>5)$ та $V_{\text{Б}} + U_{\text{Г}} > c_{\text{БГ}}$ $(-10+21>4)$ а отже, план перевезень може бути покращений за рахунок перерозподілу перевезень. З цією метою для клітини **АВ** побудовано цикл перерахунку (рис. 5.10), згідно з яким ця клітина стає базисною, а клітина **АБ** (має найменше значення $x_{ij} = 20$ серед клітин циклу, що помічені «–») – стає вільною.

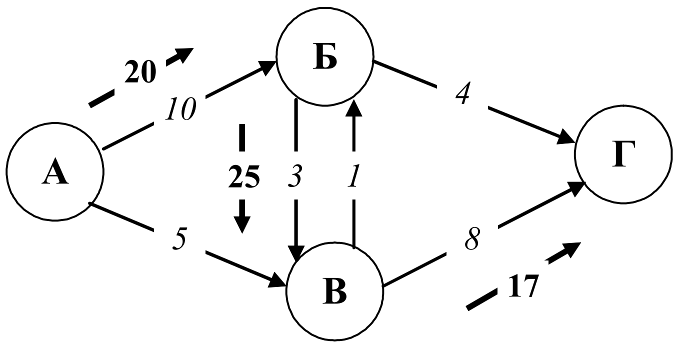


Рис. 5.11. Реалізація опорного плану перевезень
на транспортній мережі

Розв’язуючи задачу методом потенціалів, у підсумку отримаємо оптимальний розв’язок, що наведений на рис. 5.12 (умова (5.3) виконується для усіх вільних клітин).

		$U_{\text{Б}}$=6	$U_{\text{В}}$=5	$U_{\text{Г}}$=10	**Запаси**
		Б	**В**	**Г**	
$V_{\text{А}}$=0	**А**	10 6	5 5 **20**	100 10	20
$V_{\text{Б}}$=-6	**Б**	0 0 **13**	3 -1	4 4 **17**	30
$V_{\text{В}}$=-5	**В**	1 1 **12**	0 0 **13**	8 5	25
	Потреби	25	33	17	75

Рис. 5.12. Оптимальний розв’язок транспортної задачі
з проміжними пунктами

Наявність перевезень $x_{kk} > 0$ у клітинах **ББ** ($x_{\text{ББ}} = 13$) та **ВВ** ($x_{\text{ВВ}} = 13$) означає, що через ці клітини проходять транзитні вантажопотоки обсягом $Z - x_{kk} = 25 - 13 = 12$ одиниць. Розподіл вантажопотоків згідно з оптимальним планом перевезень зображено на рис. 5.13.

Загальна вартість перевезень згідно з оптимальним планом складає

$$C_{\text{опт}} = 5 \cdot 20 + 1 \cdot 12 + 4 \cdot 17 = 180 \text{ одиниць.}$$

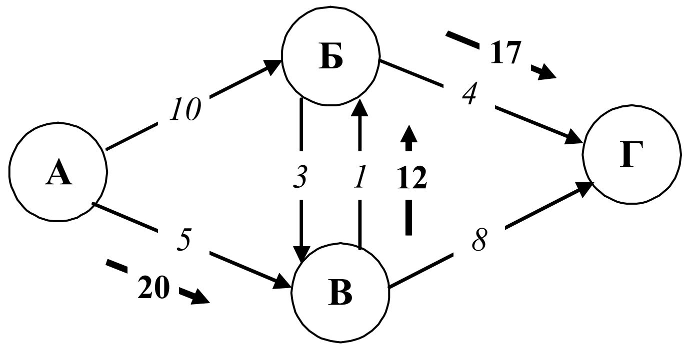


Рис. 5.13. Оптимальний розподіл вантажопотоків
на транспортній мережі

Порівняно з початковим планом перевезення (див. рис. 5.10 та 5.11) загальну вартість зменшено на $C_1 - C_{\text{опт}} = 411 - 180 = 231$ одиниць (на 56 %).

5.4. Розв'язання транспортної задачі за критерієм часу

Постановка та формалізація задачі. У деяких випадках (наприклад, при перевезенні швидкопсувних вантажів) при розробці плану перевезень головним критерієм є тривалість його виконання, тобто час T, протягом якого усі перевезення, передбачені планом, будуть закінчені. Найкращим планом перевезень у цьому випадку є той допустимий план, який забезпечує мінімальний час виконання всіх кореспонденцій: $T = \min$. Така задача являє собою *транспортну задачу за критерієм часу*. Виконаємо її постановку [1, 6].

На транспортній мережі є m пунктів відправлення $A_1, A_2, \ldots, A_m$, у яких сконцентровані запаси певного однорідного вантажу в кількості відповідно $a_1, a_2, \ldots, a_m$ одиниць. Також на мережі є n пунктів призначення $B_1, B_2, \ldots, B_n$ з потребами в цьому вантажі відповідно $b_1, b_2, \ldots, b_n$ одиниць. Припускається, що загальні запаси вантажу дорівнюють загальним потребам в ньому $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$ (збалансована транспортна задача). Відомі тривалості t_{ij} перевезення вантажу від кожного ПВ A_i до кожного ПП B_j, що задані матрицею:

$$\begin{vmatrix} t_{11} & t_{12}.....t_{1j} & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22}.....t_{2j} & t_{2n} \\ t_{m1} & t_{m2}.....t_{mj} & t_{mn} \end{vmatrix}.$$

Передбачається, що тривалості t_{ij} не залежать від кількості вантажу x_{ij}, що перевозиться між відповідними пунктами, тобто кількість транспортних засобів завжди є достатньою для виконання будь-якого обсягу перевезень.

Необхідно скласти такий план перевезень, при якому всі запаси вантажу з пунктів відправлення були б вивезені, усі потреби у вантажі в пунктах призначення були задоволені (5.1), а тривалість виконання всіх перевезень T була мінімальною.

Оскільки перевезення починаються одночасно та виконуються паралельно, то, очевидно, що всі перевезення закінчуються в момент, коли закінчується найбільш тривале перевезення, тобто час T – це максимальна тривалість серед усіх t_{ij}, що відповідають ненульовим перевезенням ($x_{ij} > 0$). Таким чином, цільову функцію цієї задачі можна записати як

$$T = \max_{x_{ij}>0} t_{ij} \to \min .$$

Треба зазначити, що транспортна задача в такій постановці не є задачею лінійного програмування, оскільки величина T – не є лінійною функцією змінних x_{ij}. Її можна звести до розв'язання задачі лінійного програмування, але не до однієї, а до декількох. Однак, транспортну задачу за критерієм часу можна розв'язати простішим методом «заборонених клітин».

Порядок розв'язання транспортної задачі за критерієм часу. Розв'язання транспортної задачі за критерієм часу виконується в транспортній таблиці (див. рис. 5.1), тільки замість вартостей c_{ij} у кожній клітині таблиці вказується тривалість виконання відповідного перевезення t_{ij}. Слід також зазначити, що, на відміну від класичної транспортної задачі, кількість базисних (зайнятих) клітин у допустимому та оптимальному планах перевезення для транспортної задачі за критерієм часу необов'язково має дорівнювати $m+n-1$.

Під час побудови початкового плану перевезень необхідно таким чином розподілити перевезення x_{ij} по клітинах транспортної таблиці, щоб виконати балансові умови (5.1); при цьому, у першу чергу, доцільно заповнювати клітини з найменшими значеннями t_{ij}. Це можна зробити, наприклад, методом подвійної переваги (див. п. 5.2).

Серед зайнятих клітин транспортної таблиці визначається клітина з найбільшим значенням $t_{ij} = t_{\max}$. Величину перевезення в цій клітині позначимо як x^*. Усі клітини таблиці, для яких $t_{ij} \geq t_{\max}$, забороняються для перевезень (закреслюються), після чого аналізується можливість перенесення кореспонденції x^* у клітину, для якої $t_{ij} < t_{\max}$. Якщо така можливість існує, то перерозподіл кореспонденцій здійснюється за допомогою циклу перерахунку (див. рис. 5.3), що забезпечує виконання балансових умов (5.1) у новому плані перевезення. Будуючи цикл, необхідно слідкувати, щоб у разі зменшення величини перевезень у клітинах (вершинах циклу, помічених знаком «–») не отримати від'ємних значень x_{ij}.

Якщо можливе перенесення кореспонденції x^* у клітину з меншим за $t_{\max}$ значенням t_{ij}, то отриманий план є оптимальним, а загальна тривалість виконання всіх перевезень цього плану $T = t_{\max}$ є мінімально можливою.

Умова задачі. Транспортна задача за критерієм часу задана у вигляді транспортної таблиці (рис. 5.14).

	B_1	**B_2**	**B_3**	**B_4**	**Запаси**
A_1	10	9	4	7	40
A_2	6	4	8	5	50
A_3	8	5	6	9	30
Потреби	20	45	25	30	120

Рис. 5.14. Вихідні умови до прикладу транспортної задачі за критерієм часу

Необхідно знайти такий план перевезень, який би забезпечував вивезення всіх запасів вантажу з пунктів відправлення, покриття всіх потреб у вантажі в пунктах призначення та мінімально можливу тривалість виконання всіх перевезень. Прийнято, що всі перевезення починаються одночасно та виконуються паралельно, а тривалість виконання кожного перевезення не залежить від його величини.

Розв'язання. Побудуємо початковий план перевезень методом подвійної переваги (рис. 5.15).

	B_1	**B_2**	**B_3**	**B_4**	**Запаси**
A_1	10	9	4** «–» **25**	7 «+» **15**	40
A_2	6*	4** **45**	8	5* **5**	50
A_3	8 **20**	5*	6 «+»	9 «–» **10**	30
Потреби	20	45	25	30	120

Рис. 5.15. Початковий план перевезень транспортної задачі за критерієм часу (ітерація 1)

В отриманому плані перевезень серед зайнятих клітин найбільше значення t_{ij} має клітина A_3B_4, отже, $t_{\max} = t_{34} = 9$; відповідно $T_1 = 9$. Усі клітини таблиці, для яких $t_{ij} \geq 9$, забороняємо для перевезень і викреслюємо (рис. 5.16).

	B_1	**B_2**	**B_3**	**B_4**	**Запаси**
A_1	~~10~~	~~9~~	4 **15**	7 **25**	40
A_2	6 «+»	4 «–» **45**	8	5 **5**	50
A_3	8 «–» **20**	5 «+»	6 **10**	~~9~~	30
Потреби	20	45	25	30	120

Рис. 5.16. Покращення плану перевезень транспортної задачі за критерієм часу (ітерація 2)

Спробуємо перенести перевезення $x^* = x_{34} = 10$ з клітини A_3B_4 у клітину з $t_{ij} < 9$, наприклад, у клітину A_3B_3 ($x_{33} = 6$). Щоб у наступному плані перевезень були дотримані балансові умови (5.1), побудуємо цикл перерахунку (рис. 5.15). У результаті перерозподілу перевезень отримано новий план, що наведений на рис. 5.16.

У новому плані перевезень $t_{max} = t_{31} = 8$; відповідно $T_2 = 8$. Усі клітини таблиці, для яких $t_{ij} \geq 8$, забороняємо для перевезень і викреслюємо (рис. 5.17). Для перенесення кореспонденції $x^* = x_{31} = 20$ у клітини з $t_{ij} < 8$, будуємо цикл перерахунку (рис. 5.16). Новий план перевезень наведено на рис. 5.17.

	B₁	**B₂**	**B₃**	**B₄**	**Запаси**
A₁	~~10~~	~~9~~	4 **15**	7 **25**	40
A₂	6 **20**	4 **25**	~~8~~	5 **5**	50
A₃	~~8~~	5 **20**	6 **10**	~~9~~	30
Потреби	20	45	25	30	120

Рис. 5.17. Оптимальний план перевезень транспортної задачі
за критерієм часу (ітерація 3)

У плані перевезень (рис. 5.17) $t_{max} = t_{14} = 7$; відповідно $T_3 = 7$. Виконаємо перевірку можливості перенесення кореспонденції $x^* = x_{14} = 25$ з клітини A_1B_4 у клітину з $t_{ij} < 7$. При перенесенні $x^* = 25$ у клітину A_1B_3 величина перевезення в ній набуде значення $15 + 25 = 40$, що порушує балансову умову по стовпчику B_3 (потреби $b_3 = 25$), однак зменшити перевезення в клітині A_3B_3 ($x_{33} = 10$) на 25 одиниць неможливо, оскільки отримаємо від'ємне значення. Перенесення $x^* = 25$ у клітину A_2B_4 призведе до порушення балансової умови по рядку A_1 на 25 одиниць, а збільшити величину перевезення в клітині A_1B_3 на 25 одиниць, як з'ясовано раніше, неможливо. Отже, план перевезень, наведений на рис. 5.17, є оптимальним та забезпечує мінімально можливий час виконання всіх перевезень, що становить 7 одиниць.

5.5. Транспортна задача на мережі

Постановка задачі. Транспортна задача може бути розв'язана як у матричній (табличній), так і в сітьовій постановці. Кожен з підходів до розв'язання транспортної задачі має свої переваги та недоліки. Табличний метод досить простий та не потребує великої кількості розрахунків, а також досить добре формалізується для розв'язання транспортної задачі на ЕОМ. Однак слід зазначити, що зі зростанням розмірів транспортної задачі кількість ітерацій збільшується майже лінійно відносно кількості рядків транспортної таблиці. Водночас при розв'язанні транспортної задачі на мережі можливо враховувати пропускну здатність окремих ділянок транспортного полігону, у той час як матричне розв'язання дозволяє врахувати лише пропускну здатність пунктів призначення. Окрім того, сітьовий спосіб розрахунку дозволяє значно простіше врахувати конфігурацію транспортної мережі, наявність різних маршрутів руху та транзитних пунктів, ніж при табличному розрахунку.

Сформулюємо транспортну задачу в сітьовій постановці [2, 10]. Нехай задано транспортну мережу з s вершинами (транспортні пункти) та e ребрами (ділянки між транспортними пунктами). Серед транспортних пунктів (вершин мережі) виділимо множину A постачальників (пунктів відправлення), множину B споживачів (пунктів призначення), множину T проміжних (транзитних) пунктів. Кожний з пунктів відправлення характеризується величиною запасів вантажу a_i $(i \in A)$, а кожний пункт призначення – величиною потреб у вантажі ($j \in B$). Для кожного ребра між пунктами i та j задано вартість перевезення одиниці вантажу c_{ij} та пропускну здатність цієї ділянки d_{ij}. Необхідно скласти план перевезень вантажу на транспортній мережі таким чином, щоб запаси вантажу були вивезені з пунктів відправлення, потреби споживачів у пунктах призначення були задоволені, а загальна вартість перевезень була мінімальною.

Якщо вартість c_{ij} являє собою відстань між пунктами, то необхідно скласти такий план перевезень, щоб загальний пробіг вантажів був мінімальним.

Формалізація задачі. Якщо позначити як x_{ij} кількість вантажу, що перевозиться по ділянці мережі між пунктами i та j, то транспортну задачу на мережі можна математично записати таким чином.

Загальна вартість перевезень повинна бути мінімальна:

$$C = \sum_{1}^{e} c_{ij} x_{ij} \to \min.$$

При цьому повинні виконуватися такі умови-обмеження:

– кількість вантажу, що вивозиться з пункту відправлення i ($i \in A$) в сусідні k пунктів, повинна дорівнювати сумарним обсягам запасів a_i у цьому пункті та обсягам вантажу, що ввозиться в цей пункт із сусідніх l пунктів (рис. 5.18, *а*):

$$\sum_k x_{ik} = a_i + \sum_l x_{li}, \quad i \in A; \tag{5.4}$$

– кількість вантажу, що ввозиться в пункт споживання j ($j \in B$) із сусідніх 1 пунктів, повинна дорівнювати сумарним обсягам споживання в цьому пункті та обсягам вантажу, що вивозиться з цього пункту в сусідні k пунктів (рис. 5.18, *б*):

$$\sum_l x_{lj} = b_j + \sum_k x_{jk}, \quad j \in B; \tag{5.5}$$

– кількість вантажу, що ввозиться в транзитний пункт r ($r \in T$) із сусідніх l пунктів, повинна дорівнювати обсягам вантажу, що вивозиться з цього пункту в сусідні k пунктів (рис. 5.18, *в*):

$$\sum_l x_{lr} = \sum_k x_{rk}, \quad r \in T; \tag{5.6}$$

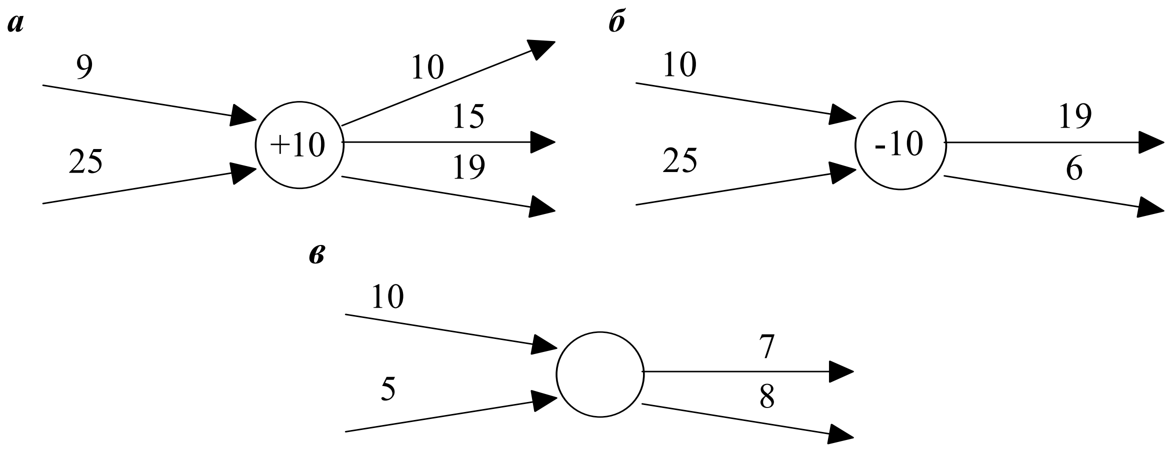


Рис. 5.18. Приклад планування обсягів перевезень для вершин транспортної мережі:

а – для пункту відправлення; *б* – для пункту призначення; *в* – для транзитного пункту

– величина вантажопотоків на ребрах (ділянках) мережі не повинна перевищувати їх пропускної здатності:

$$x_{ij} \le d_{ij}; \tag{5.7}$$

– загальні обсяги виробництва (запасів) вантажу повинні дорівнювати загальним обсягам споживання (потребам), тобто транспортна задача повинна бути збалансованою (закритою):

$$\sum_{i \in A} a_i = \sum_{j \in B} b_j .$$

Формалізація транспортної мережі. При розв'язанні транспортної задачі відповідна їй мережа представляється у вигляді графа. Кожній вершині графа відповідає певний транспортний пункт, а кожному ребру – певна ділянка між пунктами. Граф є зваженим, оскільки кожній вершині та кожному ребру ставляться у відповідність певні параметри. Для прикладу розглянемо транспортну мережу, що наведена на рис. 5.19.

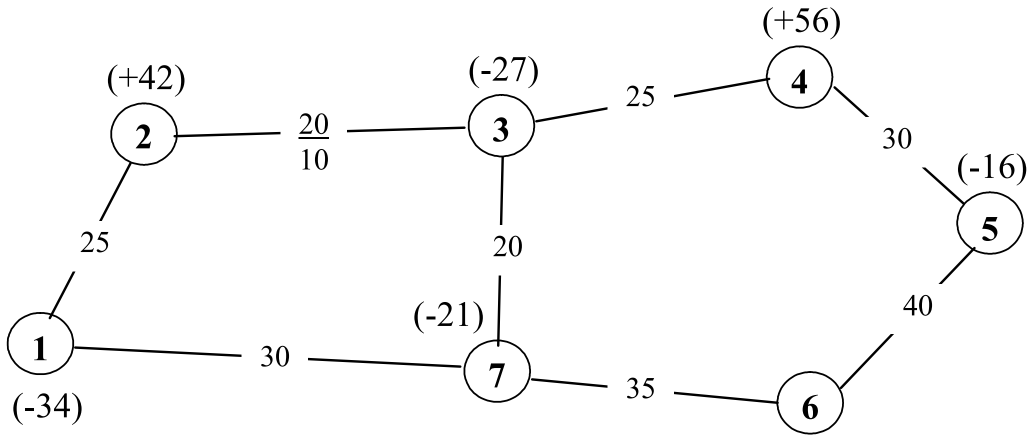


Рис. 5.19. Приклад транспортної мережі

Транспортна мережа складається із семи вершин (пунктів) і восьми ребер (ділянок). Біля вершин у дужках вказуються розміри відправлення і прибуття вантажу (відповідно зі знаком «+» чи «–»); якщо біля вершини нічого не вказано, то така вершина є транзитною (вершина *6*). Наведена транспортна мережа є збалансованою, оскільки загальні розміри відправлення ($42 + 56 = 98$) дорівнюють загальним обсягам споживання ($34 + 27 + 16 + 21 = 98$).

На кожному ребрі вказується вартість перевезення одиниці вантажу c_{ij} по відповідній ділянці, а, якщо потрібно, через дріб – пропускна здатність відповідної ділянки d_{ij} (дуга *2–3*). Дотримання масштабу при побудові мережі необов’язкове.

Побудова опорного плану перевезень. Розв’язання задачі починається зі знаходження початкового опорного плану перевезень. При складанні опорного плану перевезень необхідно домогтися, щоб увесь вантаж з пунктів відправлення був вивезений, а всі потреби у пунктах призначення були покриті. Спеціальних способів побудови опорного плану, близького до оптимального, при вирішенні транспортної задачі на мережі немає. Водночас необхідно дотримуватися виконання балансових умов (5.4)–(5.6) для транспортних пунктів та керуватися такими рекомендаціями.

Під час складання опорного плану не можна допускати зустрічні перевезення. За наявності обмежень пропускної здатності обсяг вантажу, що перевозиться по відповідному ребру, не повинен перевищувати його пропускної здатності (5.7). Для ребер з меншою вартістю доцільно планувати перевезення, якомога більші за обсягами.

Вантажопотоки (перевезення) зображають біля відповідних ребер стрілками, що вказують напрямок, а числами біля стрілок позначають величину вантажопотоків.

Базисними ребрами називають ребра з незаповненою пропускною здатністю, по яких призначені перевезення ($x_{ij} > 0$). Базисні ребра повинні складати дерево, тобто всі вершини графа повинні бути з’єднані, а на графі не повинно бути замкнутих контурів. На рис. 5.20 наведено один з можливих варіантів опорного плану перевезень для транспортної мережі, наведеної на рис. 5.19; базисні ребра виділені на графі більш товстими лініями.

Кількість базисних ребер у опорному плані перевезень повинна дорівнювати $s-1$, де s – кількість вершин. Для мережі, що наведена на рис. 5.13, кількість вершин становить 7, а базисних ребер 6 (*1–2*, *2–3*, *3–4*, *4–5*, *5–6*, *6–7*); окрім того, всі вершини зв’язані між собою, а замкнуті контури з базисних ребер відсутні. Отже, отриманий план перевезень є опорним. Загальна вартість перевезень за цим початковим планом складає

$$C_1 = 25 \cdot 34 + 20 \cdot 8 + 25 \cdot 19 + 30 \cdot 37 + 40 \cdot 21 + 35 \cdot 21 = 4\,170 \text{ одиниць.}$$

У випадку коли базисних ребер менше, ніж $s-1$, маємо випадок виродження плану перевезень, та на графі утворюються декілька ізольованих дерев. У такому випадку ці дерева необхідно з'єднати ребрами з фіктивними нескінченно малими перевезеннями ($x_{ij} \to 0$); при цьому напрям таких фіктивних вантажопотоків довільний.

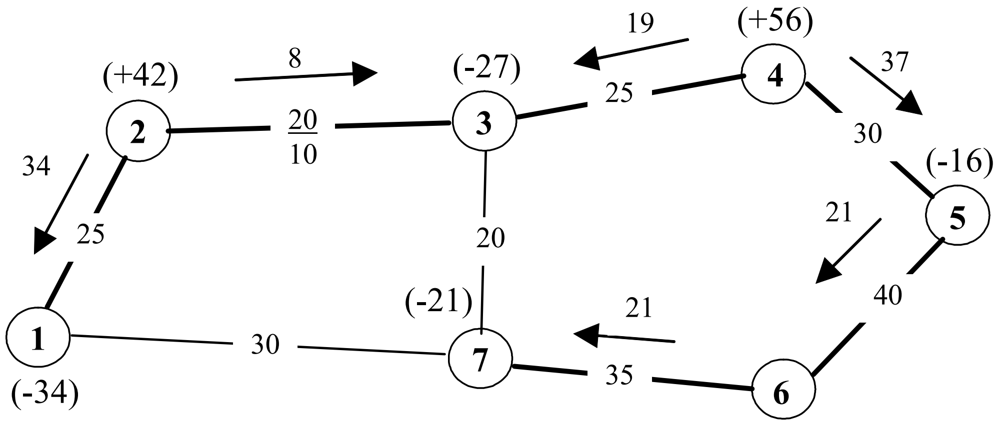


Рис. 5.20. Приклад побудови опорного плану перевезень

Після побудови опорного плану перевезень транспортна задача на мережі розв'язується методом потенціалів.

Розв'язання транспортної задачі на мережі без обмеження пропускної здатності. Для розв'язання транспортної задачі без обмежень пропускної здатності методом потенціалів необхідно побудувати початковий (опорний) план перевезень (див. рис. 5.20), а далі, поетапно покращуючи, довести його до оптимального за допомогою такого алгоритму [2]:

Крок 1 – побудова системи потенціалів. Одній з вершин присвоюється будь-який потенціал (зазвичай присвоюється досить велике значення потенціалу, щоб надалі не оперувати від'ємними значеннями). Наприклад, вершині *1* присвоїмо потенціал $v_1 = 100$ (рис. 5.21). Далі, рухаючись по базисних ребрах, розраховуються потенціали інших вершин. При цьому, якщо напрямок розрахунку збігається з напрямком руху вантажопотоків, то до потенціалу попередньої вершини додається вартість перевезення c_{ij}. При русі назустріч вантажопотоку вартість перевезень від потенціалу віднімається. Процес триває доти, доки не будуть розраховані потенціали всіх вершин.

Розрахуємо потенціали для вершин заданої транспортної мережі. Так, для вершини *2*: $v_2 = v_1 - c_{12} = 100 - 25 = 75$, для інших вершин:

$$v_3 = v_2 + c_{23} = 75 + 20 = 95, \quad v_4 = v_3 - c_{34} = 95 - 25 = 70,$$

$$v_5 = v_4 + c_{45} = 70 + 30 = 100, \quad v_6 = v_5 + c_{56} = 100 + 40 = 140,$$

$$v_7 = v_6 + c_{67} = 140 + 35 = 175.$$

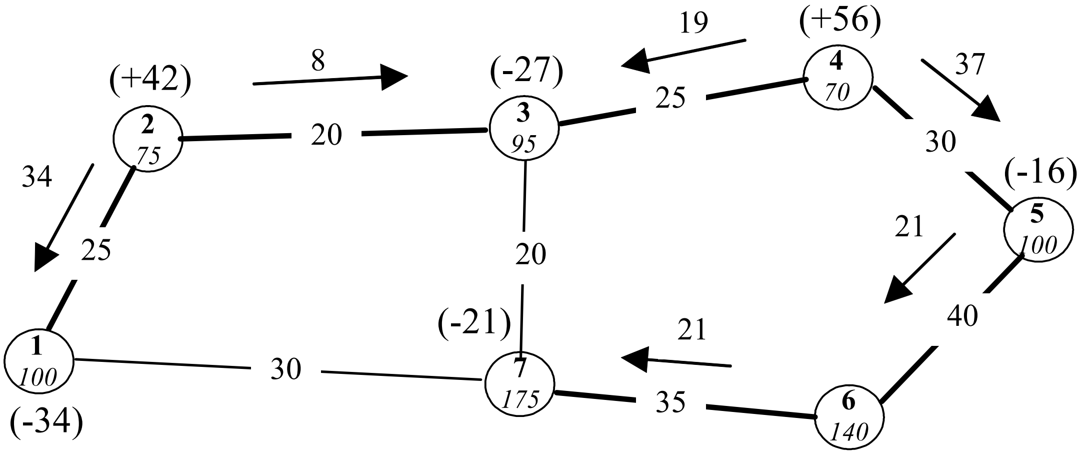


Рис. 5.21. Розрахунок потенціалів

Розраховані значення потенціалів проставляються у відповідних вершинах (див. рис. 5.21).

Крок 2 – перевірка оптимальності плану перевезень. План перевезень вважається оптимальним, якщо виконуються умови:

– для базисних ребер $\left(x_{ij} > 0\right)$:

$$\left|v_i - v_j\right| = c_{ij}; \tag{5.8}$$

– для небазисних ребер $\left(x_{ij} = 0\right)$:

$$\left|v_i - v_j\right| \le c_{ij}; \tag{5.9}$$

Якщо для якогось базисного ребра не виконується умова (5.8), то це означає, що була допущена помилка під час розрахунку потенціалів. Якщо хоча б для одного з небазисних ребер не виконується умова

(5.9), це означає, що план перевезень є не оптимальним, тобто існують потенційні небазисні ребра, завантаження яких дозволить зменшити загальну вартість перевезень.

Для плану перевезень, що наведений на рис. 5.14, умова (5.9) не виконується для ребер *1–7* ($v_7 - v_1 = 175 - 100 = 75$) та *3–7* ($v_7 - v_3 = 175 - 90 = 80$). Отже, цей план перевезень не є оптимальним. Для його покращення необхідно перерозподілити вантажопотоки (крок 3).

Крок 3 – перерозподіл вантажопотоків. Обираємо небазисне ребро *E* з найбільшим порушенням умови (5.9) та знаходимо замкнутий контур, що складається з базисних ребер та обраного ребра *E*. Рухаючись по контуру в напрямку від меншого потенціалу ребра *E* до більшого, знаходимо ребро з мінімальним зустрічним вантажопотоком $g_{\min}$.

Вводимо ребро *E* в базис шляхом пропуску через нього вантажопотоку обсягом $g_{\min}$. Просуваючись по контуру від меншого потенціалу ребра *E* до більшого, додаємо величину $g_{\min}$ до всіх попутних вантажопотоків та віднімаємо її від усіх зустрічних. У результаті ребро *E* стає базисним, а інше ребро виводиться з базису. Отриманий новий план перевезень перевіряється на оптимальність (перехід до кроку 1).

Виконаємо перерозподіл вантажопотоків для плану перевезень, наведеного на рис. 5.21. Ребро з найбільшим порушенням умови (5.9) – це ребро *3–7* ($v_7 - v_3 = 80$). Знайдемо замкнутий контур, що включає ребро *3–7* та базисні ребра, – контур *3–4–5–6–7*. Рухаючись по контуру в напрямку від вершини *3* ($v_3 = 95$) до вершини *7* ($v_7 = 175$), визначимо найменший зустрічний вантажопотік

$$g_{\min} = \min\{x_{67}, x_{56}, x_{45}\} = \{21, 21, 37\} = 21.$$

Додавши величину $g_{\min} = 21$ до всіх попутних вантажопотоків та віднявши її від усіх зустрічних вантажопотоків, отримаємо новий план перевезень, що зображений на рис. 5.22.

Слід зазначити, що під час перерозподілу вантажопотоків 2 ребра *5–6* та *6–7* отримали нульові перевезення, тобто були виведені з базису. Таким чином, у новому плані перевезень (див. рис. 5.22) кількість базисних ребер стала меншою за $s-1$, що унеможливлює розрахунок потенціалів для перевірки оптимальності цього плану, оскільки в цьому випадку відсутній зв'язок через базисні ребра з вершиною *6*. Для отримання зв'язного дерева для ребра *5–6* введено фіктивне перевезення $x_{56} = 0$ (аналогічно можна було б ввести фіктивне перевезення по ребру *6–7*).

Перевіримо новий план перевезень на оптимальність методом потенціалів. Значення нових потенціалів для вершин наведені на рис. 5.22.

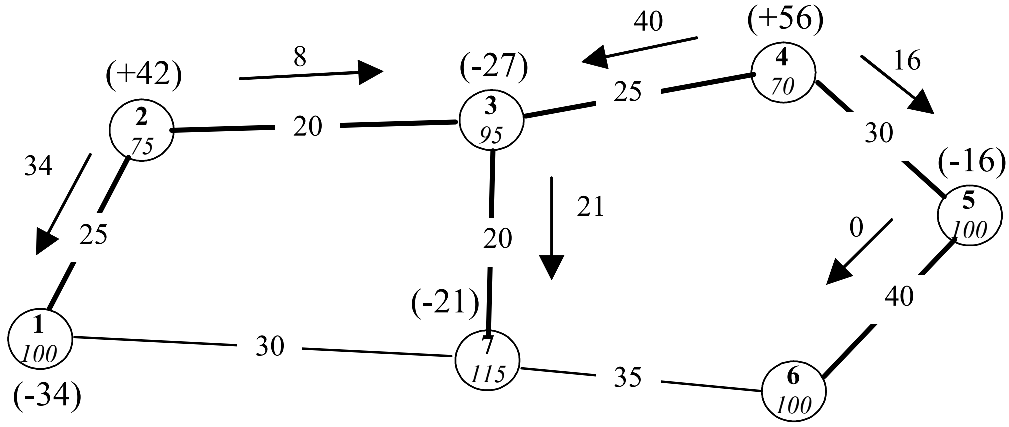


Рис. 5.22. Оптимальний план перевезень

Перевірка умови (5.9) показує, що вона виконується для усіх небазисних ребер:

– для ребра *1–7* $115 - 100 < 30$;
– для ребра *6–7* $115 - 100 < 35$.

Отже, отриманий план є оптимальним; при цьому загальна вартість перевезення складає:

$$C_2 = 25 \cdot 34 + 20 \cdot 8 + 25 \cdot 40 + 30 \cdot 16 + 40 \cdot 0 + 20 \cdot 21 = 2\,910 \text{ одиниць.}$$

Таким чином, початковий план перевезення покращено на $C_1 - C_2 = 4\,170 - 2\,910 = 1\,260$ одиниць, тобто на 30 %.

Розв'язання транспортної задачі на мережі з обмеженнями пропускної здатності. На практиці досить часто на окремих ділянках реальних транспортних мереж існують обмеження щодо пропускної здатності, і цей фактор необхідно враховувати під час розв'язання відповідних транспортних задач. Розглянемо приклад розв'язання таких задач.

На рис. 5.23 наведено мережу, що представлена графом з п'яти вершин та семи ребер. Транспортна мережа є збалансованою, оскільки загальні запаси вантажу ($25+12=37$) дорівнюють загальним потребам ($15+22=37$). Пропускна здатність дуг *2–5* та *1–4* обмежена і складає відповідно 15 і 6 одиниць.

При складанні початкового плану необхідно дотримуватись обмежень пропускної здатності ребер. Так, по ребру *2–5* необхідно було б спрямувати вантажопотік у розмірі 22 одиниці (для покриття потреб пункту 5), однак, пропускна здатність цього ребра всього 15 одиниць, тому залишок у розмірі $22-15=7$ одиниць пропускається альтернативним маршрутом через ребра *2–4* та *4–5*.

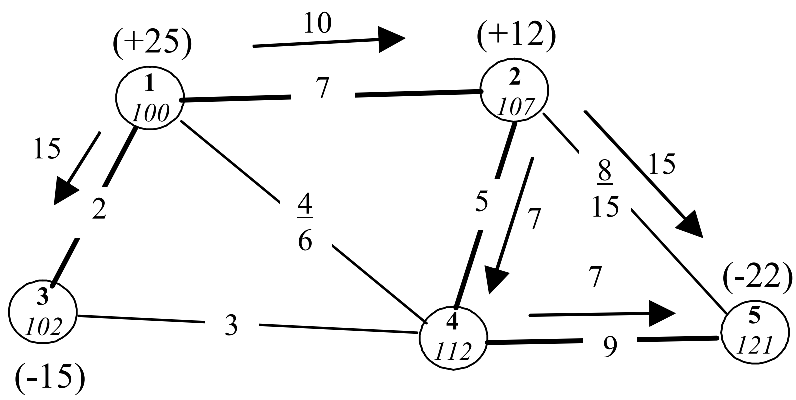


Рис. 5.23. Транспортна мережа з обмеженнями пропускної здатності (опорний план перевезень – ітерація 1)

Початковий план перевезень, що наведений на рис. 5.23, є опорним, оскільки включає $5-1=4$ базисних ребра: *1–2*, *2–4*, *1–3* та *4–5*. Зазначимо, що вантажопотік також пропускається і по ребру *2–5*, однак, оскільки пропускна здатність цього ребра використана повністю, у базис ребро *2–5* не включається. Розрахуємо загальну вартість перевезення для отриманого початкового плану:

$$C_1 = 2\cdot 15 + 7\cdot 10 + 8\cdot 15 + 5\cdot 7 + 9\cdot 7 = 318 \text{ одиниць.}$$

Далі алгоритм розв'язання транспортної задачі з обмеженням пропускної здатності такий [3, 10]:

Крок 1 – розрахунок потенціалів вершин. Виконується аналогічно транспортній задачі без обмежень пропускної здатності. Значення потенціалів наведені у відповідних вершинах транспортної мережі (див. рис. 5.23).

Крок 2 – перевірка оптимальності плану. План перевезень є оптимальним, якщо виконується умова (5.8) для базисних ребер з резервом пропускної здатності $\left(0 < x_{ij} < d_{ij}\right)$, умова (5.9) для небазисних ребер $\left(x_{ij} = 0\right)$, а для ребер, де вичерпано пропускну здатність $\left(x_{ij} = d_{ij}\right)$, умова

$$\left|v_i - v_j\right| \ge c_{ij}. \tag{5.10}$$

Остання умова також може бути представлена в такому вигляді:

$$\left|v_i - v_j\right| = c_{ij} + \delta_{ij},$$

де δ_{ij} – так звана прокатна оцінка. Економічна сутність прокатної оцінки полягає в тому, що вона виражає додаткові витрати на одиницю вантажу при його перевезенні альтернативним маршрутом через недостатню пропускну спроможність. Тому під час розробки заходів щодо збільшення пропускної здатності транспортної мережі, у першу чергу, необхідно звертати увагу на ділянки з найбільшою прокатною оцінкою.

Якщо вказані умови не виконуються, то такий план перевезень не є оптимальним і може бути покращений. Величина Δ_{ij} виявлених порушень умов (5.9) та (5.10) розраховується за формулою

$$\Delta_{ij} = \left|v_i - v_j\right| - c_{ij}.$$

При цьому для небазисних ребер величина $\Delta_{ij} > 0$, а для ребер з вичерпаною пропускною здатністю $\Delta_{ij} < 0$. У прикладі, що наведений на рис. 5.23, виявлено порушення умови (5.9) для небазисних ребер *1–4* та *3–4*:

$$\Delta_{14} = \left|v_4 - v_1\right| - c_{14} = 112 - 100 - 4 = 8;$$

$$\Delta_{34} = \left|v_4 - v_3\right| - c_{34} = 112 - 102 - 3 = 7.$$

Отже, отриманий початковий план перевезень не є оптимальним.

Крок 3 – перерозподіл вантажопотоків. Обираємо ребро Q з найбільшим по модулю порушенням Δ умов (5.9) або (5.10). Знаходимо замкнутий контур, що складається з базисних ребер та ребра Q. Напрямок руху по контуру – від вершини з меншим потенціалом для ребра Q до вершини з більшим потенціалом.

Якщо для ребра Q порушення $\Delta Q > 0$, то величина покращення плану визначається мінімальною величиною вантажопотоку на зустрічних ребрах або мінімальною різницею між пропускною здатністю та величиною вантажопотоку на попутних ребрах:

$$g = \min\left[\min\left\{x_{ij}^{\text{зустр}}\right\}; \min\left\{d_{ij} - x_{ij}^{\text{попут}}\right\}\right].$$

Отримана величина g додається до всіх попутних та віднімається від усіх зустрічних вантажопотоків замкнутого контуру.

Якщо для ребра Q порушення $\Delta Q < 0$, то величина покращення плану визначається мінімальною величиною вантажопотоку на попутних ребрах або мінімальною різницею між пропускною здатністю та величиною вантажопотоку на зустрічних ребрах:

$$g = \min\left[\min\left\{x_{ij}^{\text{попут}}\right\}; \min\left\{d_{ij} - x_{ij}^{\text{зустр}}\right\}\right].$$

Отримана величина g додається до всіх зустрічних і віднімається від усіх попутних вантажопотоків.

Виконаємо перерозподіл вантажопотоків для плану перевезень, наведеного на рис. 5.23. Ребро з найбільшим порушенням умови (5.9) – це ребро *1–4* ($\Delta 14 = 8 > 0$). Знайдемо замкнутий контур, що включає ребро *1–4* та базисні ребра, – це контур *1–4-2-1*. Рухаючись по контуру в напрямку від вершини *1* ($v_1 = 100$) до вершини *4* ($v_4 = 112$), визначимо найменший зустрічний вантажопотік

$$\min\left\{x_{24}, x_{12}\right\} = \left\{7, 10\right\} = 7;$$

додатковий вантажопотік, який можна пропустити по попутних ребрах $d_{14} - x_{14} = 6 - 0 = 6$. Таким чином, $g = \min\left[7, 6\right] = 6$.

Додавши величину $g_{\min} = 6$ до всіх попутних вантажопотоків у контурі та віднявши її від усіх зустрічних вантажопотоків, отримаємо новий план перевезень, що зображений на рис. 5.24.

Визначимо вартість перевезення для нового покращеного плану:

$$C_2 = 2 \cdot 15 + 7 \cdot 4 + 8 \cdot 15 + 4 \cdot 6 + 5 \cdot 1 + 9 \cdot 7 = 270 \text{ одиниць.}$$

Оскільки при перерозподілі вантажопотоків пропускна здатність ребра *1–4* повністю вичерпана, то це ребро до базису не вводиться, і він залишається без змін. Таким чином, значення потенціалів для вершин не змінюються (див. рис. 5.17), а значить, залишається порушення умови (5.9) для ребра *3–4* ($\Delta 34 = 7 > 0$), тобто отриманий план перевезень не є оптимальним.

Далі необхідно ввести до базису ребро *3–4* ($g = 1$); при цьому ребро *2–4* виводиться з базису (рис. 5.25).

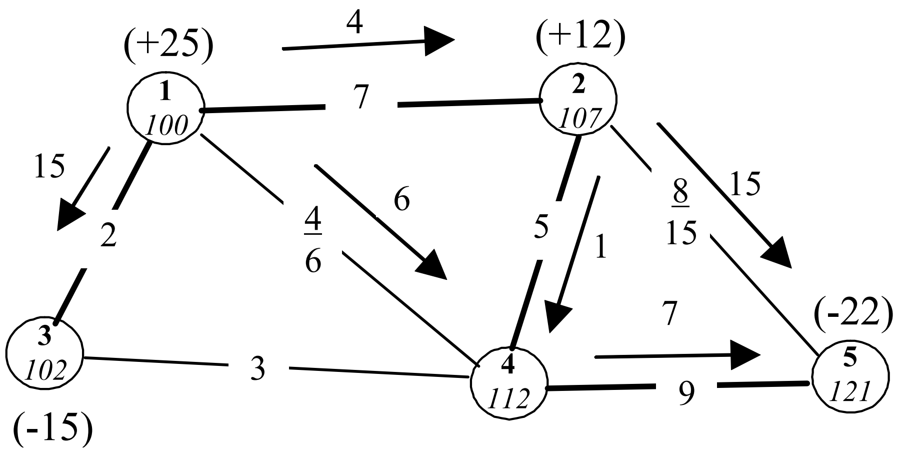


Рис. 5.24. Транспортна мережа з обмеженнями пропускної здатності (покращений план перевезень – ітерація 2)

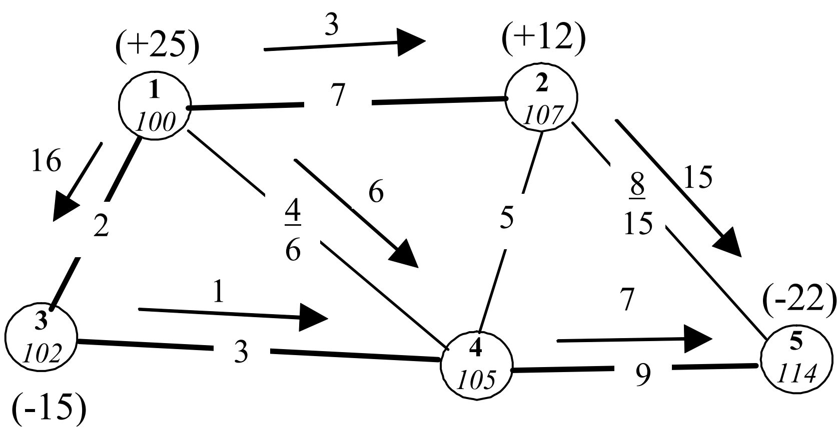


Рис. 5.25. Транспортна мережа з обмеженнями пропускної здатності (покращений план перевезень – ітерація 3)

$$C_3 = 2\cdot 16 + 7\cdot 3 + 8\cdot 15 + 4\cdot 6 + 3\cdot 1 + 9\cdot 7 = 263 \text{ одиниць.}$$

Отриманий план перевезень не є оптимальним, оскільки після перерахунку потенціалів для ребра *2–5* порушується умова (5.10): $114 - 104 = 7 < 8$ ($\Delta 25 = -1 < 0$). Отже, ребро *2–5* необхідно ввести до базису ($g = 3$); при цьому ребро *1–2* з базису виключається (рис. 5.26).

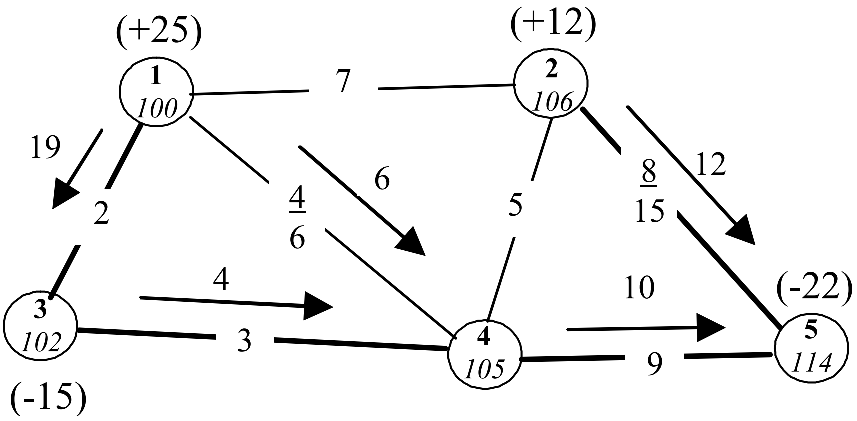


Рис. 5.26. Транспортна мережа з обмеженнями
пропускної здатності (оптимальний план перевезень)

Перевірка показала, що для отриманого плану перевезень умови (5.8)–(5.10) виконуються для всіх ребер. Окрім того, кількість базисних ребер дорівнює 4 (ребро *1–4* не є базисним, оскільки його пропускна здатність повністю вичерпана). Отже, цей план перевезень є оптимальним. При цьому загальна вартість перевезень складає:

$$C_4 = 2\cdot 19 + 3\cdot 4 + 4\cdot 6 + 9\cdot 10 + 8\cdot 12 = 260 \text{ одиниць.}$$

Таким чином, початковий план перевезень (див. рис. 5.16) покращено на $C_1 - C_4 = 318 - 260 = 58$ одиниць (18,2 %).

Контрольні запитання та завдання

1. Сформулювати постановку класичної транспортної задачі.
2. Навести приклади транспортних задач.
3. Які дані є вихідними для транспортної задачі?

4. Якими особливостями транспортна задача відрізняється від основної задачі лінійного програмування?
5. Чому дорівнюють коефіцієнти при всіх змінних в обмеженнях транспортної задачі?
6. Що являє собою змінна в транспортній задачі?
7. Що називають «перевезенням» у транспортній задачі?
8. Що називають «планом перевезень» транспортної задачі?
9. Що називають «допустимим», «опорним» та «оптимальним» планом перевезень при розв'язанні транспортної задачі?
10. Що являє собою транспортна таблиця? Навести приклад.
11. Яким даним відповідають рядки та стовпчики транспортної таблиці?
12. Які дані записують в останні рядок та стовпчик транспортної таблиці?
13. Де в транспортній таблиці записують вартості перевезень та кількість вантажу, що перевозиться з кожного пункту відправлення в кожний пункт призначення?
14. Які клітини транспортної таблиці називають базисними, а які вільними?
15. Скільки у транспортній таблиці має бути базисних і вільних клітин в опорному плані перевезень?
16. Коли транспортна задача є «закритою», а коли – «відкритою»?
17. Як перейти від «відкритої» транспортної задачі до «закритої», якщо загальні запаси вантажу перевищують потреби в цьому вантажі?
18. Як перейти від «відкритої» транспортної задачі до «закритої», якщо загальні запаси вантажу менші, ніж потреби в цьому вантажі?
19. У якому випадку в транспортну таблицю вводять фіктивний пункт відправлення, а в якому – фіктивний пункт призначення?
20. Яка вартість перевезення одиниці вантажу з фіктивного пункту відправлення або до фіктивного пункту призначення?
21. Які є методи знаходження опорного плану перевезень при розв'язанні транспортної задачі?
22. Який загальний принцип усіх методів знаходження опорного плану перевезень транспортної задачі?

23. Пояснити принцип методу «подвійної переваги» для знаходження опорного плану перевезень.
24. У якому випадку план перевезень є виродженим? Яким чином це виправити?
25. Що таке «потенціал» при розв'язанні транспортної задачі?
26. Який порядок розрахунку потенціалів у транспортній таблиці?
27. Які умови оптимальності плану перевезень при розв'язанні транспортної задачі методом потенціалів?
28. Для якої клітини транспортної таблиці будують цикл перерахунку при розв'язанні транспортної задачі методом потенціалів?
29. Що таке «цикл перерахунку» при розв'язанні транспортної задачі методом потенціалів? Який принцип побудови циклу перерахунку та яку він може мати форму?
30. Який порядок перерахунку обсягів перевезень у циклі?
31. Навести приклади транспортних задач з обов'язковими перевезеннями. Який принцип їх розв'язання?
32. Навести приклади транспортних задач із забороненими перевезеннями. Який принцип їх розв'язання?
33. Навести приклади транспортних задач з проміжними пунктами.
34. Сформулювати постановку транспортної задачі з проміжними пунктами.
35. Які основні особливості транспортної задачі з проміжним пунктами на відміну від класичної транспортної задачі?
36. Як класифікують транспортні пункти при розв'язанні транспортної задачі з проміжними пунктами?
37. Що таке буфер у транспортній задачі з проміжним пунктами? Як визначити його необхідну величину?
38. Якими мають бути запаси в дійсних пунктах відправлення та в транзитних пунктах в еквівалентній транспортної задачі?
39. Якими мають бути потреби в дійсних пунктах призначення та в транзитних пунктах в еквівалентній транспортній задачі?
40. Чому відповідають рядки та стовпчики транспортної таблиці при розв'язанні транспортної задачі з проміжними пунктами?
41. Яка вартість перевезення встановлюється для клітини, що знаходиться на перетині рядка та стовпчика, які відповідають од-

ному транзитному пункту? Що означає ненульова величина перевезення у такій клітині?

42. Навести приклади транспортних задач за критерієм часу.
43. Сформулювати постановку задачі за критерієм часу.
44. Пояснити принцип цільової функції для транспортної задачі за критерієм часу та наведіть відповідний вираз.
45. Які основні особливості транспортної задачі за критерієм часу?
46. Пояснити основний порядок розв’язання транспортної задачі за критерієм часу методом «заборонених клітин».
47. Які основні переваги та недоліки розв’язання транспортної задачі на мережі у порівнянні з табличним методом розв’язання?
48. Сформулювати транспортну задачу в сітьовій постановці.
49. Сформулювати умови-обмеження для транспортної задачі на мережі.
50. Пояснити принцип формалізації транспортної мережі у вигляді графа.
51. Які параметри вказуються для вершин та ребер графа при розв’язанні транспортної задачі на мережі?
52. Порядок знаходження опорного плану перевезень при розв’язанні транспортної задачі на мережі.
53. Які ребра графа називаються базисними при розв’язанні транспортної задачі на мережі? Скільки їх повинно бути в опорному плані перевезень?
54. У якому випадку може спостерігатись випадок виродження при розв’язанні транспортної задачі на мережі? Яким чином це виправити?
55. Пояснити порядок розрахунку потенціалів вершин при розв’язанні транспортної задачі на мережі.
56. Які умови оптимальності плану перевезень при розв’язанні методом потенціалів транспортної задачі на мережі без обмежень пропускної здатності?
57. Поясність порядок перерозподілу перевезень між ребрами графа при розв’язанні методом потенціалів транспортної задачі на мережі без обмежень пропускної здатності.
58. Які умови оптимальності плану перевезень при розв’язанні методом потенціалів транспортної задачі на мережі з обмеженнями пропускної здатності?

59. Що таке «прокатна оцінка» при розв'язанні методом потенціалів транспортної задачі на мережі з обмеженнями пропускної здатності?
60. Поясність порядок перерозподілу перевезень між ребрами графа при розв'язанні методом потенціалів транспортної задачі на мережі з обмеженнями пропускної здатності.
61. Сформулювати транспортну задачу як основну задачу лінійного програмування (записати систему обмежень та цільову функцію у стандартному вигляді) та отримати її числовий розв'язок. Дані про запаси та потреби вантажу, а також матриця вартостей задані в табл. 5.7.

Таблиця 5.7

Вихідні дані до задачі 61

Пункти відправлення	Пункти призначення		Запаси
	B_1	B_2	
A_1	5	8	100
A_2	140	3	150
Потреби	140	110	250

62. Розв'язати транспорту задачу, умови якої наведено у табл. 5.8, за критерієм мінімальної вартості.

Таблиця 5.8

Вихідні дані до задачі 62

Пункти відправлення	Пункти призначення					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	1	5	20	17	9	210
A_2	10	1	10	7	17	50
A_3	5	8	3	16	6	20
A_4	3	7	16	5	12	140
A_5	11	10	15	13	3	50
Потреби	120	100	160	40	50	470

62. Розв'язати транспорту задачу, умови якої наведено у табл. 5.9, за критерієм мінімальної вартості.

Таблиця 5.9

Вихідні дані до задачі 63

Пункти відправлення	Пункти призначення				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	12	5	17	4	220
A_2	6	2	8	10	160
A_3	16	8	9	11	180
A_4	11	14	2	1	230
A_5	20	16	6	20	110
Потреби	110	220	230	140	–

63. Розв'язати задачі, умови яких наведено у табл. 5.8 та табл. 5.9, за критерієм максимальної вартості.

64. На залізницю з пунктів A_i в моменти часу T_i надходять порожні вагони. Необхідно забезпечити подачу цих вагонів у пункти B_j на 18:00 таким чином, щоб загальні пробіги вагонів були мінімальними. Дані про моменти T_i надходження вагонів до пунктів A_i, їх кількість, потреби у вагонах в пунктах B_j, а також про відстані між пунктами A_i та B_j наведені у табл. 5.10. Врахувати, що середня дільнична швидкість становить $V_д = 50$ км/год.

65. На території міста працює автопідприємство, що надає послуги вантажних таксі. Це підприємство має чотири гаражі $Г_i$ по 7 автомобілів у кожному і диспетчерський центр, що координує їх роботу. На початок зміни надходять заявки від клієнтів K_j на подачу автомобілів під завантаження. Необхідно розробити план подачі автомобілів таким чином, щоб їх загальний пробіг був мінімальним. При цьому потрібно врахувати умову, що зміна у гаражах починається у 8:00, а автомобілі повинні бути у пунктах завантаження не пізніше ніж о 9:00. Кількість автомобілів, яку потрібно надати клієнтам, відстані між

клієнтами та гаражами автопідприємства наведено у табл. 5.11. Середня швидкість руху автомобіля по місту 40 км/год.

Таблиця 5.10

Вихідні дані до задачі 65

Пункти відправлення	Пункти призначення					Момент прибуття	Прибуття вагонів
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5		
A_1	20	540	20	70	50	0:00	47
A_2	560	60	520	340	220	0:00 12:00	82 62
A_3	380	270	100	240	300	6:00	37
A_4	660	360	420	320	600	6:00	75
A_5	460	400	340	590	440	10:00	84
Потреби	60	150	45	50	70	–	–

Таблиця 5.11

Вихідні дані до задачі 66

Гаражі	Клієнти				
	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5
$Г_1$	28	15	23	25	37
$Г_2$	27	45	19	29	35
$Г_3$	19	21	38	21	37
$Г_4$	33	29	35	29	33
Потреби	2	5	6	9	2

66. До складу промислового об’єднання входить чотири заводи $З_i$, що випускають однотипну продукцію для п’яти споживачів C_i. Необхідно розробити план закріплення споживачів за заводами таким чином, щоб загальна вартість перевезень була мінімальною; при цьому потрібно врахувати, що мінімально допустимий обсяг виробництва для кожного заводу

складає 50 одиниць. Дані про продуктивність заводів, потреби продукції у пунктах споживання, а також про вартість перевезення одиниці продукції наведено в табл. 5.12.

Таблиця 5.12

Вихідні дані до задачі 67

Заводи	Споживачі					Продуктивність
	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	
$З_1$	21	15	23	25	12	130
$З_2$	27	19	11	29	35	110
$З_3$	19	21	31	23	31	50
$З_4$	33	29	31	19	33	90
Потреби	30	20	45	72	50	–

67. Для вивантаження суден у чотири порти $П_j$ протягом трьох діб потрібно подати порожні вагони з трьох сортувальних станцій C_i. Необхідно таким чином розподілити вагони між станціями та портами, щоб загальний пробіг вагонів був мінімальним. Дані про потреби портів у вагонах, наявну кількість порожніх вагонів та їх добове надходження на сортувальні станції, а також про відстані між портами та станціями наведено у табл. 5.13. Врахувати, що середня швидкість просування вагонів від станцій до портів складає 380 км/добу.

Таблиця 5.13

Вихідні дані до задачі 68

Сортувальні станції	Порти				Наявність вагонів	Добове надходження
	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$		
C_1	460	430	820	770	97	105
C_2	670	860	580	450	132	83
C_3	270	390	940	670	121	67
Потреби	147	151	203	116	–	–

68. Вугледобувні басейни *А*, *Б* та *В* обслуговують електростанції *Г*, *Д*, *Е* та *Ж*. Необхідно розробити план закріплення електростанцій до вугільних басейнів таким чином, щоб загальні витрати на перевезення були мінімальними; при цьому врахувати, що для електростанції *Г* обсяг споживання вугілля калорійністю більше 6 000 кКал/кг має складати не менше 40 %. Дані про середньодобову продуктивність вугільних басейнів, калорійність вугілля, добові потреби електростанцій в умовному паливі (вугілля калорійністю 7 000 кКал/кг), а також про вартість транспортування 1 т вугілля від басейнів до електростанцій наведено в табл. 5.14.

Таблиця 5.14

Вихідні дані до задачі 69

Вугільні басейни	Електростанції				Продуктивність, тис. т/доб	Калорійність вугілля, кКал/кг
	Г	*Д*	*Е*	*Ж*		
А	121	65	65	95	35	7 000
Б	85	65	70	75	15	5 600
В	90	80	100	70	25	6 300
Потреби, тис. т/доб	20	20	10	15	–	–

69. Чотири підприємства $П_i$ промислового об’єднання є клієнтами залізниці. Щоденно кожному з підприємств необхідно завантажити n_i вагонів однотипного вантажу на одній із вантажних станцій C_j залізничного вузла. Доставка вантажу на станції здійснюється автотранспортом. Вартість перевезення автотранспортом вантажу обсягом у один вагон на відстань 1 км складає 250 грн. У випадку, якщо на станції за добу завантажується не більше чотирьох вагонів від одного підприємства, то перевантаження з автомобілів здійснюється за прямим варіантом, інакше – виникають додаткові витрати, пов’язані з перевантаженням та зберіганням вантажу на складі у розмірі 550 грн/вагон. Необхідно розробити план завантаження вагонів на станціях вузла таким чином, щоб загальні

витрати були мінімальними. Дані про добове надходження вантажу від підприємств, переробну спроможність станцій та про відстані між підприємствами та станціями наведено в табл. 5.15.

Таблиця 5.15

Вихідні дані до задачі 70

Вугільні басейни	Вантажні станції			Надходження вантажу, ваг.
	C_1	C_2	C_3	
$П_1$	10	7	6	5
$П_2$	12	9	4	6
$П_3$	7	8	12	4
$П_4$	9	5	9	7
Переробна спроможність, ваг./добу	10	7	11	–

70. Автопідприємство має парк автомобілів вантажопідйомністю 2 та 4 т, які базуються в чотирьох гаражах $Г_i$. У диспетчерський центр автопідприємства надійшли замовлення від чотирьох клієнтів K_i на перевезення неподільних відправок масою 1, 2 та 4 тонни. Необхідно розробити такий план подачі автомобілів від гаражів до клієнтів, що забезпечуватиме мінімальний загальний пробіг рухомого складу. Дані про розподіл автомобілів по гаражах, потреби клієнтів у відправленні вантажів, а також про відстані між пунктами наведено у табл. 5.16.
71. Нафтопродукти від пунктів A_i перевозяться до пунктів споживання B_j залізничним транспортом. Визначити, на скільки скоротяться витрати на перевезення після побудови трубопроводу з пункту A_4 в пункт B_1, який буде перекачувати 12 млн т/рік, якщо приведені річні витрати на його побудову й експлуатацію складуть 70 млн грн. Дані про обсяги запасів та потреби нафтопродуктів, а також про витрати на залізничні перевезення 1 т наведено в табл. 5.17.

Таблиця 5.16

Вихідні дані до задачі 71

Гаражі		Клієнти				Наявність автомобілів	
		K_1	K_2	K_3	K_4	2 т	4 т
$Г_1$		20	28	14	22	5	4
$Г_2$		18	14	12	9	3	0
$Г_3$		10	18	16	24	4	2
$Г_4$		28	12	9	6	6	0
Наявність відправок	1 т	4	2	2	6	–	–
	2 т	2	1	6	2	–	–
	4 т	1	3	0	1	–	–

Таблиця 5.17

Вихідні дані до задачі 72

Пункти відправлення	Пункти споживання				Запаси, млн т
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	16	9	7	5	4
A_2	11	12	14	4	8
A_3	9	11	7	16	6
A_4	8	8	13	12	12
A_5	7	13	10	9	5
Потреби, млн т	15	5	6	9	–

72. Розв’язати транспортну задачу з проміжними пунктами у матричній формі за критерієм мінімальної вартості перевезень. Відповідну транспортну мережу та вартость перевезення одиниці вантажу між пунктами мережі наведено на рис. 5.27. Запаси вантажу в пунктах *А*, *Б* та *Г* транспортної мережі становлять відповідно 40, 50 та 10 одиниць, а потреби у вантажі

в пунктах *В*, *Ж* та *З* становлять відповідно 15, 30 та 55 одиниць.

73. Розв'язати транспортну задачу з проміжними пунктами в матричній формі за критерієм мінімальної вартості перевезень. Відповідну транспортну мережу та вартість перевезень одиниці вантажу між пунктами мережі наведено на рис. 5.28. Запаси вантажу в пунктах *А*, *Б*, *В* та *Г* транспортної мережі становлять відповідно 45, 30, 50 та 15 одиниць, а потреби у вантажі в пунктах *Д*, *Е*, *Ж* та *З* становлять відповідно 10, 35, 55 та 40 одиниць.

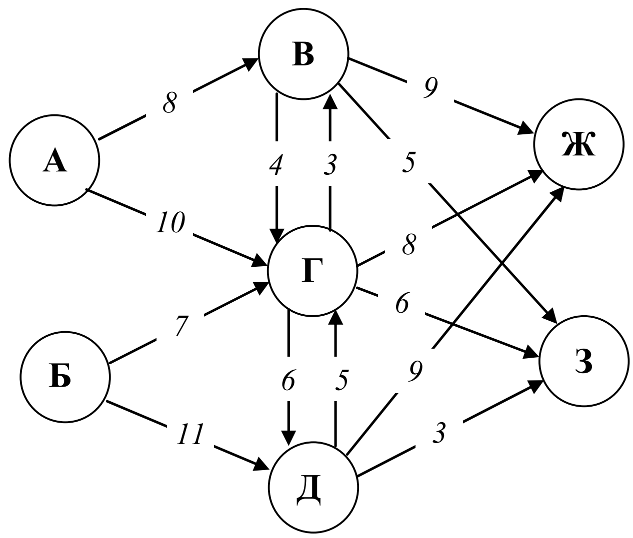


Рис. 5.27. Транспортна мережа до задачі 73

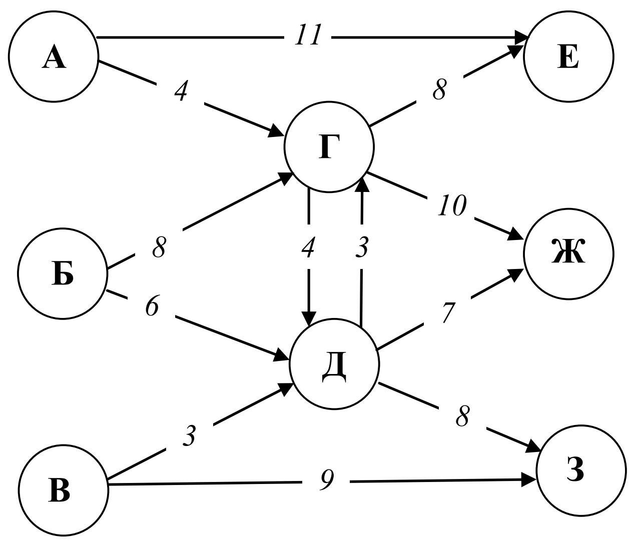


Рис. 5.28. Транспортна мережа з вихідними даними до задачі 74

74. Розв'язати транспорту задачу, умови якої наведено в табл. 5.18, за критерієм мінімальної тривалості перевезень.

Таблиця 5.18

Вихідні дані до прикладу 75

Пункти відправлення	Пункти призначення				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	12	5	10	4	160
A_2	6	2	8	10	70
A_3	16	8	9	11	110
A_4	11	14	2	1	120
Потреби	40	80	100	240	460

75. Розподілити перевезення на транспортній мережі, яка зображена на рис. 5.29, таким чином, щоб загальні витрати були мінімальними.

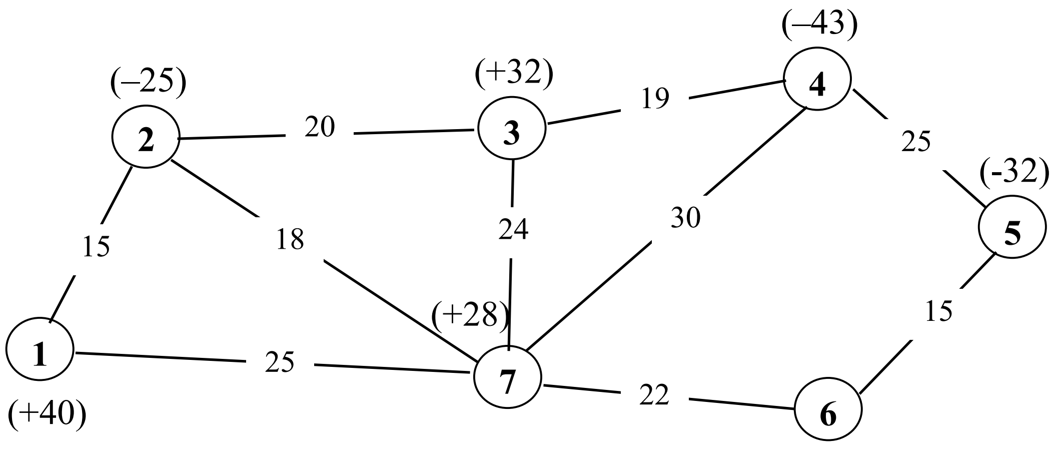


Рис. 5.29. Транспортна мережа з вихідними даними до задачі 77

76. Розподілити перевезення на транспортній мережі, зображеній на рис. 5.30, таким чином, щоб загальні витрати були мінімальними. Врахувати наявність обмежень пропускної здатності.
77. Вантажний район залізничної станції обслуговує місто. Вивезення вантажів зі станції та їх ввезення на станцію виконується однотипними автомобілями. Кількість рейсів, що необхідна для задоволення заявок, наведено у табл. 5.19. Схема доріг

міста та відстані між пунктами навантаження та вивантаження зображені на рис. 5.31. Якщо в пунктах навантаження не вистачає автомобілів, то вони направляються туди зі станції, надлишкові автомобілі направляються на станцію. Станції відповідає вершина № 1. Необхідно розробити план роботи автомобілів таким чином, щоб їхні порожні пробіги були мінімальними.

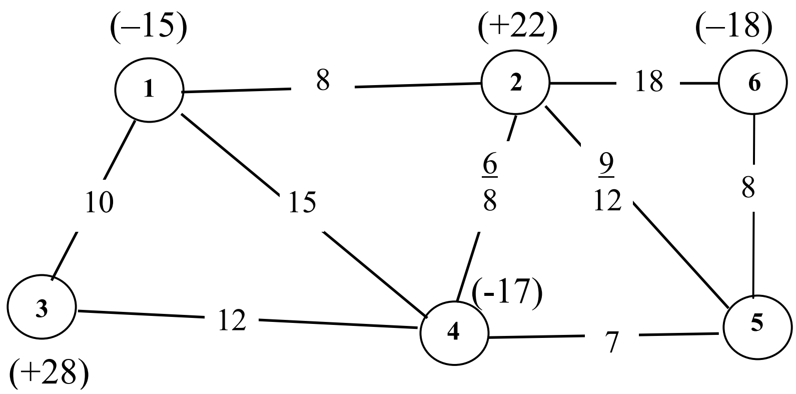


Рис. 5.30 Транспортна мережа з вихідними даними до задачі 77

Таблиця 5.19

Вихідні дані до прикладу задачі 79

Операції в пункті мережі	Пункт мережі							
	2	3	4	5	6	7	8	9
Вивантаження, авт.	22	20	10	5	17	27	4	10
Навантаження, авт.	2	4	10	20	8	2	14	30

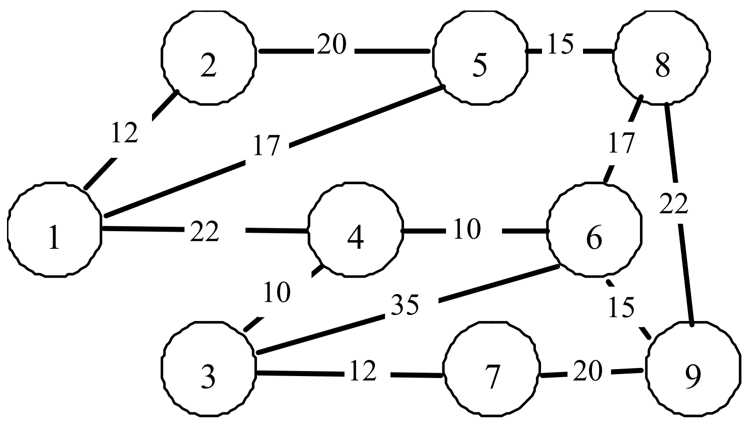


Рис. 5.31. Транспортна мережа з вихідними даними до задачі 78

78. Підприємства *А* та *Б* здійснюють поставки однорідної продукції до пунктів *В*, *Г* та *Д*. Перевезення між пунктами можуть виконуватись автомобільним та залізничним транспортом. Вартість перевантаження одиниці вантажу з одного виду транспорту на інший складає 20 у. о. Необхідно скласти план перевезень таким чином, щоб їх загальна вартість була б мінімальною. Схема транспортної мережі, обсяги перевезень, а також вартість перевезень (у. о.) одиниці продукції наведені на рис. 5.32 (залізниця показана подвійною лінією, а автошляхи – одинарною).

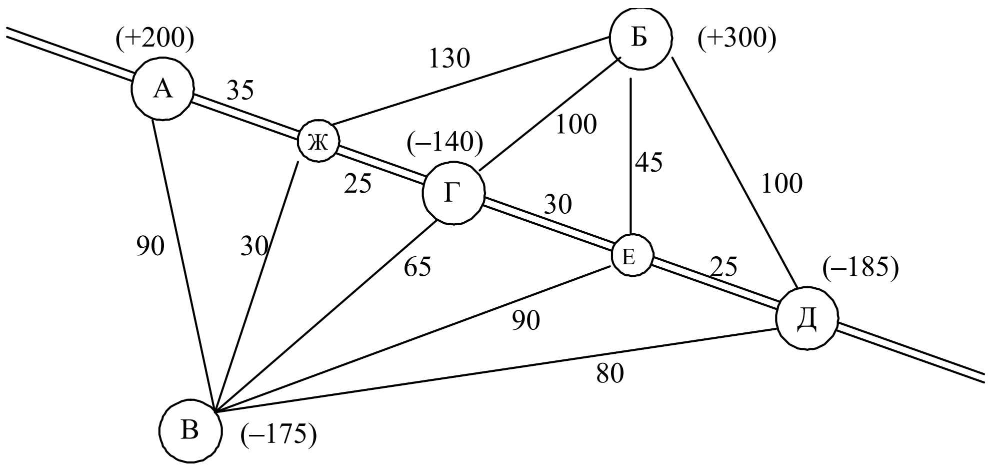


Рис. 5.32. Транспортна мережа з вихідними даними до задачі 79

79. На транспортній мережі (рис. 5.33), що передбачає можливість виконання залізничних та змішаних залізнично-водних перевезень, розташовані два пункти *А* та *Б* відправлення вантажу, три пункти *В*, *Г* та *Д* його призначення, а також п'ять річкових портів *Ж*, *З*, *И*, *К* та *Л*. На рис. 5.33 наведено дані про вартість перевезень вантажу відповідними залізничними лініями та ділянками річки; вартість перевантаження з одного виду транспорту на інший вказано у вершинах мережі, що відповідають портам. Необхідно розробити план перевезень таким чином, щоб їх загальна вартість була мінімальною.
80. Три підприємства *Г*, *Д* та *Ж* промислового об'єднання є клієнтами залізниці. На їх адресу щоденно на станції C_1 та C_2 залізничного вузла надходять вагони з однотипною продукцією від виробників *А*, *Б* та *В*. Від станцій продукція на підприємства доставляється автомобілями. При вивантаженні не більше

200 т на станції C_1 та не більше 300 т на станції C_2 перевантаження з вагонів у автомобілі здійснюється по прямому варіанту, інакше – виникають додаткові витрати на перевантаження та зберігання надлишку вантажу на складі у розмірі 10 у. о./т Вартість перевезення 1 т вантажу на 1 км залізничним транспортом складає 1 у. о., а автомобільним транспортом – 3 у. о. Схему транспортної мережі, відстані між пунктами, а також обсяги відправлення та споживання наведено на рис. 5.34 (залізничні шляхи виділено жирною лінією).

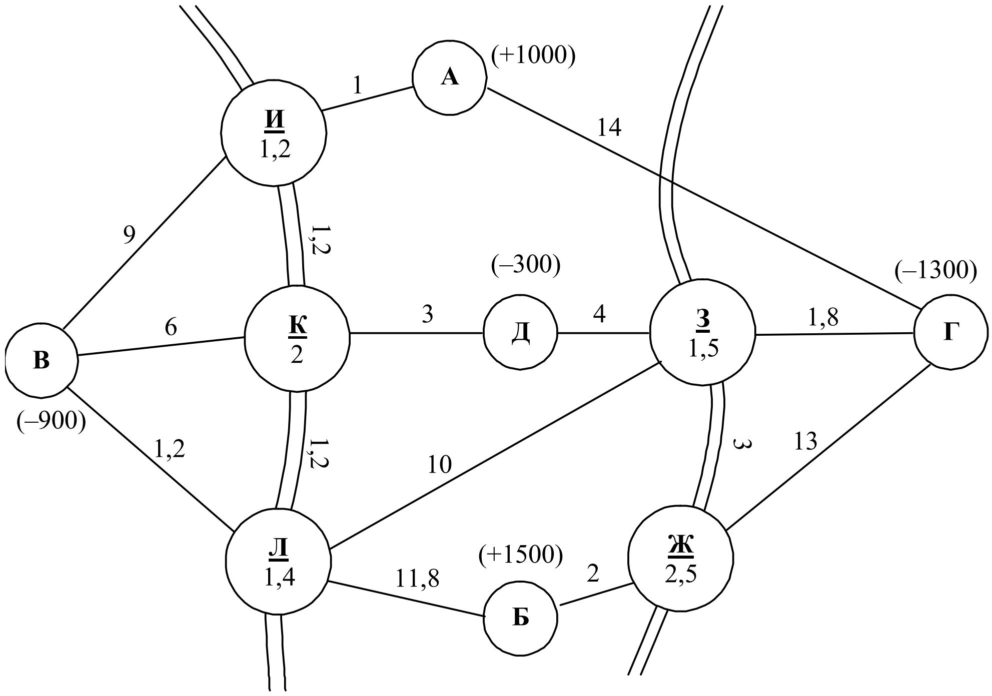


Рис. 5.33. Транспортна мережа з вихідними даними до задачі 80

81. На рис. 5.35 зображено транспортну мережу. Пункти *А*, *Б*, *Е* та *Ж* є пунктами відправлення поїздів, а пункти *В*, *Г*, *Д*, *З* та *И* є пунктами призначення поїздів. Обсяги добового відправлення та прибуття поїздів, а також вартість пропуску поїздів по залізничних ділянках наведено на рис. 5.35. Між пунктами *Г* та *Е* організовано поромну переправу з пропускною здатністю 3 поїзди/добу. Необхідно визначити, на скільки зменшаться загальні витрати на організацію перевезень, якщо між пунктами *В* та *Ж* буде споруджено залізничний міст з пропускною здатністю 20 поїздів/добу та вартістю пропуску поїзда 2 у. о.

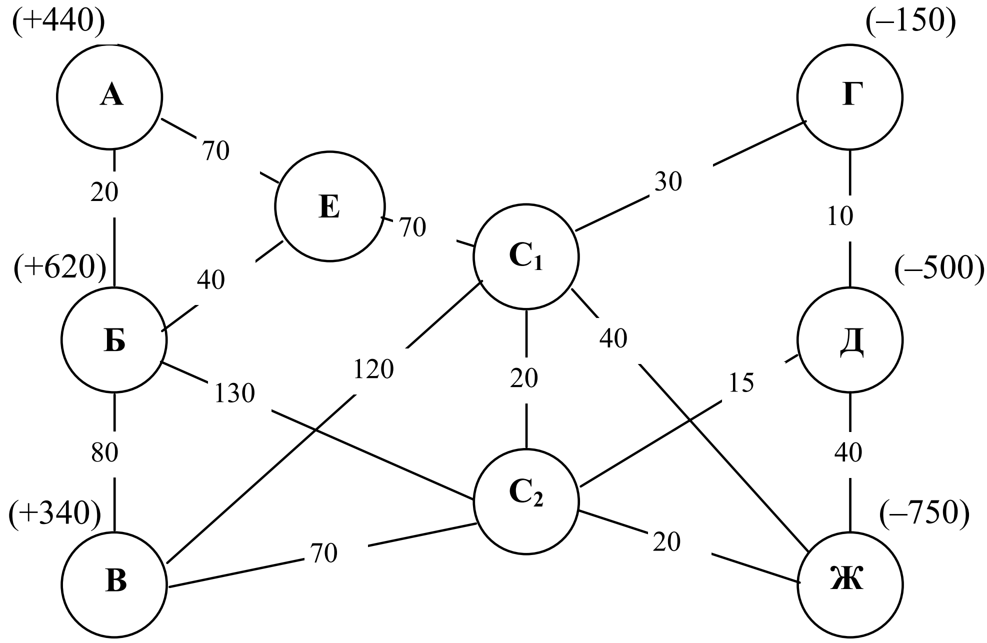


Рис. 5.34. Транспортна мережа з вихідними даними до задачі 81

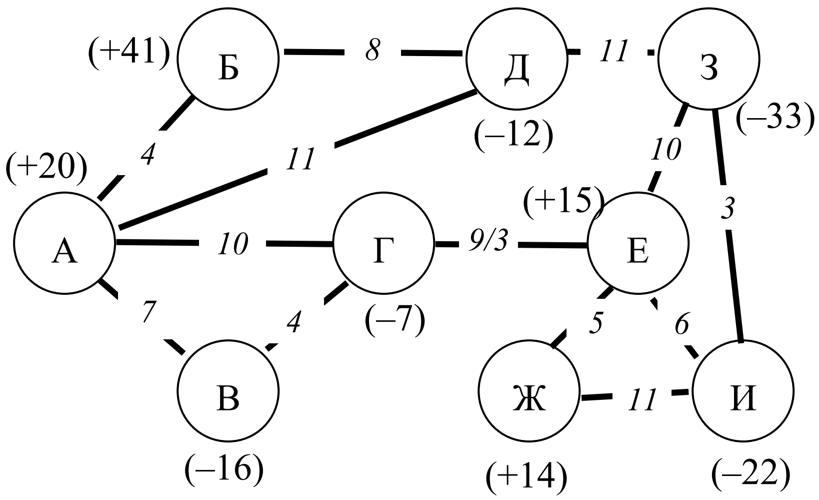


Рис. 5.35. Транспортна мережа з вихідними даними до задачі 82

РОЗДІЛ 6

Розподільна задача лінійного програмування

6.1. Постановка розподільної задачі

Поширеною і важливою економіко-математичною задачею є вибір найбільш раціональних варіантів використання різноманітних видів взаємозамінних ресурсів для виконання різних видів робіт. До таких задач належить розподільна задача [2, 7, 8].

Прикладами розподільної задачі можуть бути задачі планування розподілу порожнього рухомого складу (вагонів, автомобілів, контейнерів) за напрямками перевезень, планування розстановки взаємозамінного рухомого складу за фронтами навантаження, розподіл за районами маневрових локомотивів чи розстановка навантажувально-розвантажувальних механізмів за вантажними фронтами.

У задачах розподілення взаємозамінних ресурсів вихідними даними є:

– обсяги B_j різноманітних робіт *j*, які повинні бути виконані;

– наявна кількість ресурсів A_i різноманітних видів ресурсів *i*;

– витрати ресурсів кожного типу *i* на одиницю робіт кожного виду *j* $\left(a_{ij}\right)$.

Необхідно при заданих значеннях A_i, B_j, a_{ij} визначити обсяг кожного виду робіт *j*, який виконується за допомогою ресурсу *i* $\left(x_{ij}\right)$, та кількість одиниць ресурсу *i*, який використовується на роботах виду *j* $\left(y_{ij} = a_{ij}x_{ij}\right)$.

При розподіленні ресурсів можуть ставитися задачі двох типів:

1) загальної кількості ресурсів недостатньо для повного задоволення потреб (наприклад, наявної кількості вагонів недостатньо для вивозу всього вантажу). У цьому випадку виконання максимального

загального об'єму роботи є важливішим за зниження витрат. Тому в таких задачах критерієм оптимальності є максимальних обсяг роботи, що виконується.

2) загальної кількості ресурсів достатньо для повного задоволення всіх потреб. Критерієм оптимальності в даному випадку є зведення до мінімуму загальної суми витрат на виконання заданого обсягу роботи.

Для залізничної станції типовою задачею такого роду є розподілення вагонів різних видів під завантаження різних категорій вантажів. Якщо порожніми пробігами вагонів до місць навантаження можна знехтувати, то критерієм раціонального розподілення вагонів є досягнення максимуму середнього статичного навантаження; очевидно, що при цьому загальна кількість використаних вагонів буде мінімальною.

Виконаємо математичну постановку задачі розподілу вагонів під завантаження. Нехай відомі кількість різноманітних вантажів у тоннах B_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$, які необхідно буде відправити зі станції, наявність порожніх вагонів різних типів A_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ та їх технічні норми завантаження p_{ij} для кожного типу вантажу; причому за неможливості відправлення певного вантажу в даному типі вагона приймається значення $p_{ij} = 0$.

Необхідно розподілити вагони кожного типу під різні вантажі таким чином, щоб використати мінімальну кількість вагонів.

Позначимо через x_{ij} кількість вагонів i-го типу, що використовується під завантаження j-м вантажем. Тоді матимемо таку систему обмежень:

– зі станції необхідно завантажити весь обсяг вантажу кожного типу:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} p_{ij} = B_j \quad \left(j = 1, 2, \ldots, n\right); \tag{6.1}$$

– кількість вагонів кожного типу, що зайняті під навантаження, не повинна перевищувати їх наявної кількості:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le A_i \quad \left(i = 1, 2, \ldots, m\right). \tag{6.2}$$

Цільова функція: кількість вагонів, що зайняті під навантаження, повинна бути мінімальною

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \to \min . \tag{6.3}$$

Оскільки обмеження (6.1) та (6.2), а також цільова функція (6.3) являють собою лінійні вирази, то розподільна задача в такій постановці є типовою задачею лінійного програмування.

6.2. Порядок розв’язання розподільної задачі

Метод розв’язувальних множників. Розподільна задача є одним із різновидів транспортної задачі лінійного програмування, а отже, може бути розв’язана одним з відповідних методів (наприклад, методом, потенціалів). Однак, враховуючи особливості розподільної задачі, її можна розв’язати більш простими методами. Зокрема, ефективним є метод розв’язувальних множників, що розроблений Л. В. Канторовичем [2]. Перевагами цього методу є його відносна простота та можливість отримання цілочислового результату.

Розв’язання розподільної задачі методом розв’язувальних множників виконується в табличній формі у матриці завантаження. Кожний рядок матриці відповідає певному *i*-му типу ресурсів A_i (у нашому випадку – певному типу вагона); причому по кожному рядку вказується наявність цих ресурсів A_i (кількість вагонів *i*-го типу). Стовпчики відповідають різним роботам (у нашому випадку – різним типам вантажів), по кожному стовпчику вказується обсяг роботи B_j, що має бути виконаний (обсяг вантажу для завантаження). У кутах клітин матриці записуються норми витрат ресурсів a_{ij} на виконання кожної роботи (у нашому випадку – технічні норми завантаження p_{ij}). Останні три стовпчики відводяться для суми витрачених ресурсів (вагонів) кожного виду, величини їх надлишку або нестачі, а також для розрахункових міток. Приклад такої матриці завантаження наведено в табл. 6.1.

Таблиця 6.1

Приклад матриці завантаження

Вагони	Вантажі					Зайнято вагонів	Баланс	Мітка
	Вантаж-1 310 т	Вантаж-2 200 т	Вантаж-3 150 т	Вантаж-4 60 т	Вантаж-5 70 т			
1-й тип – 14 ваг.	22	8	15	7	0			
2-й тип – 3 ваг.	30	15	19	8	14			
3-й тип – 4 ваг.	33	23	31	10	12			
4-й тип – 60 ваг.	20	9	14	7	12			

Розглянемо алгоритм розв’язання розподільної задачі [2].

Крок 1. Скласти початковий варіант розподілення вагонів таким чином, щоб кожен вантаж був направлений у тих вагонах, для яких норма завантаження є максимальною (за наявності однакових норм завантаження – у менш дефіцитних вагонах). При цьому кількість вагонів кожного *i*-го типу, що використовуються для завантаження *j*-го вантажу, визначається за формулою $x_{ij} = B_j / p_{ij}$ (результат округлюється в більшу сторону). Кількість вагонів, що зайняті, а також кількість вантажу, що має бути в них перевезено, записується у відповідній клітині матриці через дріб.

Крок 2. Визначити сумарну кількість вагонів кожного виду, що зайняті під навантаження, та записати у відповідну клітину матриці. Розрахувати надлишки або нестачу вагонів кожного типу за формулою $R_i = A_i - \sum_j x_{ij}$ $\left(i = 1, 2, \ldots, m\right)$ та записати у відповідні клітини: $R_i > 0$ – надлишок вагонів *i*-го типу, $R_i < 0$ – нестача вагонів. Якщо всі $R_i \geq 0$, то розрахунок завершено – цей розв’язок є оптимальним, інакше перейти до *кроку 3*.

Крок 3. Класифікувати рядки матриці завантаження на «надлишкові» та «недостатні». «Недостатніми» є всі рядки, у яких $R_i < 0$, а також рядки, у яких $R_i = 0$, та які відповідають такій вимозі: поточне значення норми навантаження p_{ij} в одному зі стовпців цього рядка дорівнює поточному значенню навантаження p_{ij} в клітині, що розташована на перетині цього стовпця та одного з «недостатніх» рядків; при цьому дана клітина в «недостатньому» рядку повинна бути зайнятою ($x_{ij} > 0$). Якщо хоча б одна з цих вимог не виконується, то рядок, у якому $R_i = 0$, не є «недостатнім». Усі «недостатні» рядки помічаються зірочкою (*) в останньому стовпці матриці.

Приклади визначення «недостатніх» рядків наведені на рис. 6.1, 6.2.

На рис. 6.1 наведено приклади матриць, у яких у першому рядку баланс $R_1 = 0$, другий рядок є «недостатнім». Норма навантаження в 1-му стовпчику першого рядка ($p_{11} = 30$) дорівнює нормі навантаження, що вказана в 1-му стовпчику 2-го рядка ($p_{21} = 30$), який є «недостатнім» (баланс $R_2 < 0$). При цьому клітина, яка розташована на перетині 2-го рядка та 1-го стовпця є зайнятою ($x_{21} > 0$). Отже, у кожній матриці на рис. 6.1 перший рядок є «недостатнім».

Вантажі / Вагони	Вантаж-1 300 т	Вантаж-2 150 т	Зайнято вагонів	Баланс	Мітка
1-й тип 3 ваг.	30 **3/90**	12	3	0	*
2-й тип 4 ваг.	30 **7/210**	15 **10/150**	17	–13	*

Вантажі / Вагони	Вантаж-1 300 т	Вантаж-2 150 т	Зайнято вагонів	Баланс	Мітка
1-й тип 10 ваг.	30	15 **10/150**	10	0	*
2-й тип 4 ваг.	30 **10/90**	12	10	–6	*

Рис. 6.1. Приклад матриць, у яких рядок $R_i = 0$ є «недостатнім»

Вантажі / Вагони	Вантаж-1 300 т	Вантаж-2 150 т	Зайнято вагонів	Баланс	Мітка
1-й тип 10 ваг.	25	15 **10/150**	10	0	
2-й тип 4 ваг.	30 **10/90**	12	10	–6	*

Вантажі / Вагони	Вантаж-1 300 т	Вантаж-2 150 т	Зайнято вагонів	Баланс	Мітка
1-й тип 10 ваг.	30 **10/90**	12	10	0	
2-й тип 4 ваг.	25	15 **10/150**	10	–6	*

Вантажі / Вагони	Вантаж-1 300 т	Вантаж-2 150 т	Зайнято вагонів	Баланс	Мітка
1-й тип 10 ваг.	30 **10/90**	12	10	0	
2-й тип 4 ваг.	30	15 **10/150**	10	–6	*

Рис 6.2. Приклад матриць, у яких рядок $R_i = 0$ не є «недостатнім»

У матрицях, що наведені на рис. 6.2, баланс першого рядка також нульовий ($R_1 = 0$), другий рядок є «недостатнім». Однак у перших двох матрицях норма навантаження в жодній клітині першого рядка не дорівнює нормі навантаження у відповідних стовпчиках другого «недостатнього» рядка ($p_{11} \neq p_{21}$ та $p_{12} \neq p_{22}$). У третій матриці $p_{11} = p_{21} = 30$, однак клітина, яка розташована на перетині другого «недостатнього» рядка та першого стовпчика, незайнята ($x_{21} = 0$). Отже, у жодній з трьох матриць на рис. 6.2 перший рядок не є «недостатнім».

Якщо всі рядки в матриці завантаження є «недостатніми», то кінець розв'язання – вивезти весь вантаж неможливо, а це рішення забезпечує максимальний вивіз вантажу, інакше перейти до *кроку 4*.

Крок 4. Для кожного стовпця, для якого $x_{ij} > 0$ у «недостатньому» рядку, визначити значення розв'язувальних множників відношення

$$\lambda_j = \left(\max_i p_{ij} \right) \Big/ \left(\max_{(R_i \geq 0)} p_{ij} \right),$$

(у чисельнику – максимальне значення норми завантаження по стовпцю в цілому, а в знаменнику – максимальне значення норми завантаження серед «надлишкових рядків»). Отримані значення λ_j записуються в нижній рядок.

Крок 5. Визначити мінімальне значення серед λ_j $\left(\lambda^* = \min \lambda_j\right)$. Стовпчик t матриці, по якому визначено значення λ^*, є потенційним для перерозподілу обсягів вантажу між «недостатнім» та «надлишковим» рядками.

Крок 6. Перетворити матрицю завантаження, розділивши всі значення p_{ij} в «недостатніх» рядках на λ^*. Значення p_{ij} із «надлишкових» рядків переносяться в нову матрицю без змін.

Крок 7. У стовпчику t в одному з «надлишкових» рядків s нової матриці знайти клітину st, для якої нова величина норми навантаження p_{st} стала дорівнювати максимальному значенню p_{it} у цьому стовпці (максимальне значення p_{it} розташоване в одному з «недостатніх» рядків). Клітина st розглядається як допустима; до неї по стовпчику переноситься додатній об'єм вантажу x_{st} з «недостатнього» рядка.

При цьому необхідно враховувати, що поява нових від'ємних балансів і зменшення використання ресурсів не допускається. Важливо також пам'ятати, що кількість вагонів, яка використовується під навантаження після перерозподілу, визначається за фактичними (вихідними) значеннями норм завантаження p_{ij}. Перейти до *кроку 2*.

Умова задачі. Для вихідних даних, наведених у табл. 6.1, виконати розподіл вагонів під навантаження.

Розв'язання. Складемо початковий план завантаження, намагаючись вивезти максимальну кількість вантажу мінімальною кількістю вагонів. Для цього в кожному стовпчику обираємо вагони з максимальною нормою завантаження p_{ij} і визначаємо їх кількість за формулою $x_{ij} = B_j / p_{ij}$ (наприклад, для *Вантажу-1* $p_{i1}^{\max} = p_{41} = 33$ т, $x_{41} = 310/33 = 9{,}39$ ваг.; округлюємо до цілого в більшу сторону і отримуємо $x_{41} = 10$ вагонів). Якщо технічна норма завантаження $p_{ij} = 0$, то вантаж у вагонах такого типу перевозити заборонено $\left(p_{15} = 0\right)$. Початковий план завантаження наведено на рис. 6.3.

Для кожного типу вагонів розраховуємо баланс (наприклад, вагонів 3-го типу зайнято $10 + 9 + 5 + 6 = 30$, баланс складає $4 - 30 = -26$ вагонів). Рядки з від'ємним балансом одразу позначаємо міткою (*) як «недостатні».

Вагони	Вантаж-1	Вантаж-2	Вантаж-3	Вантаж-4	Вантаж-5	Зайнято вагонів	Баланс	Мітка
	310 т	200 т	150 т	60 т	70 т			
1-й тип 14 ваг.	22	8	15	7	0	0	+14	
2-й тип 3 ваг.	30	15	19	8	14 **5/70**	5	–2	*
3-й тип 4 ваг.	33 **10/310**	23 **9/200**	31 **5/150**	10 **6/60**	12	30	–26	*
4-й тип 60 ваг.	20	9	14	7	12	0	+60	
λ	1,5	2,556	2,067	1,43	**1,167**			

Рис. 6.3. Початковий план завантаження (ітерація 1)

Для кожної зайнятої клітини з «недостатніх» рядків розраховуємо розв'язувальні множники λ_j (наприклад, для 1-го стовпчика $\lambda_1 = 33/22 = 1{,}5$) та записуємо їх у матрицю (рис. 6.3). Серед усіх λ_j обираємо мінімальне значення $\left(\lambda^* = \lambda_5 = 1{,}167 = 14/12\right)$. Клітина з поточним значенням завантаження $p_{45} = 12$ з «надлишкового» рядка 4 буде допустимою для переносу (по стовпчику 5) деякого обсягу *Вантажу-5* з «недостатнього» рядка (з клітини 2–5). Потенційне перенесення показується стрілкою (див. рис. 6.3). *Обов'язковою умовою перенесення вантажу між клітинами є рівність їх поточних норм завантаження. Кількість вантажу, що переноситься, не повинна привести до появи нових від'ємних балансів або до погіршення рівня використання ресурсів (вагонів).*

Перетворюємо матрицю завантаження, розділивши всі значення p_{ij} в «недостатніх» рядках на λ^* (дробові результати записуються з точністю до тисячних); значення p_{ij} із «надлишкових» рядків переноситься без змін. У допустиму клітину (4–5) переноситься додатковий обсяг *Вантажу-5* з клітини (2–5). При цьому у вагонах 2-го типу необхідно залишити завантаженими 3 вагони, щоб не отримати надлишковий баланс у 2-му рядку; кількість *Вантажу-5*, яка може бути завантажена в ці вагони, $3 \cdot 14 = 42$ т. Таким чином, у клітину (4–5) для завантаження у вагони 4-го типу можна перенести $70 - 42 = 28$ т *Вантажу-5*; необхідна для цього кількість вагонів $28/12 = 2{,}3 \approx 3$ ваг. Нова матриця завантаження наведена на рис. 6.4.

Вагони	Вантаж-1	Вантаж-2	Вантаж-3	Вантаж-4	Вантаж-5	Зайнято вагонів	Баланс	Мітка
	310 т	200 т	150 т	60 т	70 т			
1-й тип 14 ваг.	22	8	15	7	0	0	+14	
2-й тип 3 ваг.	25,707	12,853	16,281	6,855	12 **3/42**	3	0	
3-й тип 4 ваг.	28,278 **10/310**	19,709 **9/200**	26,564 **5/150**	8,569 **6/60**	10,283	30	–26	*
4-й тип 60 ваг.	20	9	14	7	12 **3/28**	3	+57	
λ	**1,100**	1,533	1,632	1,224				

Рис. 6.4. Розв'язання розподільної задачі (ітерація 2)

Слід зазначити, що рядок 2 у новій матриці (див. рис. 6.4) з балансом $R_2 = 0$ не є «недостатнім», тому що поточне значення навантаження $p_{25} = 12$ не дорівнює поточному значенню навантаження в клітині, що розташована на перетині цього стовпця та «недостатнього» рядку 3 із завантаженням $p_{35} = 10{,}283$.

У новій матриці (див. рис. 6.4) розраховуємо множники λ_j та визначаємо $\lambda^* = \lambda_1 = 1{,}100 = 28{,}278/25{,}707$. Клітина 2–1 з поточним значенням завантаження $p_{21} = 25{,}707$ з «надлишкового» рядка 2 буде допустимою для переносу по стовпчику 1 деякого обсягу *Вантажу-1* з «недостатнього» рядка (з клітини 3–1).

Перетворюємо матрицю завантаження (рис. 6.5). Оскільки є всього 3 вагони 2-го типу з вихідною нормою завантаження для *Вантажу-1* 30 т, то в клітину 2–1 з клітини 3–1 можна перенести максимально $3 \cdot 30 = 90$ т *Вантажу-1*.

У вагонах 3-го типу при цьому залишиться $310-90=220$ т *Вантажу-1*, для перевезення якого необхідно $220/33\approx 7$ вагонів.

При перенесенні 90 т *Вантажу-1* у рядок 2 завантажуються усі наявні вагони 2-го типу. Тому щоб не створювати від'ємного балансу, 42 т *Вантажу-5* переноситься у «надлишковий» рядок 4 (див. рис. 6.4); при цьому для перевезення $28+42=70$ т *Вантажу-5* необхідно $70/12\approx 6$ вагонів 4-го типу.

Рядок 2 з балансом $R_2=0$, на відміну від попереднього кроку, буде «недостатнім», оскільки поточне значення навантаження $p_{21}=25,707$ дорівнює значенню «навантаження» p_{31} у зайнятій клітині, що розташована в «недостатньому» рядку. Нова матриця завантаження наведена на рис. 6.5.

Вагони	Вантаж-1	Вантаж-2	Вантаж-3	Вантаж-4	Вантаж-5	Зайнято вагонів	Баланс	Мітка
	310 т	200 т	150 т	60 т	70 т			
1-й тип 14 ваг.	22	8	15	7	0	0	+14	
2-й тип 3 ваг.	25,707 **3/90**	12,853	16,281	6,855	12	3	0	*
3-й тип 4 ваг.	25,707 **7/220**	17,917 **9/200**	24,149 **5/150**	7,790 **6/60**	9,348	27	–23	*
4-й тип 60 ваг.	20	9	14	7	12 **6/70**	6	+54	
λ	1,169	1,991	1,610	**1,113**				

Рис. 6.5. Розв'язання розподільної задачі (ітерація 3)

У новій матриці (рис. 6.5) розраховуємо множники λ_j та визначаємо $\lambda^*=\lambda_4=1{,}113=7{,}790/7$. У новій матриці (рис. 6.6) переносимо 60 т *Вантажу-4* з клітини 3–4 «недостатнього» рядка 3 у клітину 4–4 «надлишкового» рядка і для цього завантажуємо $60/7\approx 9$ вагонів 4-го типу.

У матриці (рис. 6.6) $\lambda^*=\lambda_1=1{,}05=23{,}1/22$. У новій матриці (рис. 6.7) переносимо 220 т *Вантажу-1* з клітини 1–3 «недостатнього» рядка 3 у клітину 1–1 «надлишкового» рядка і для цього завантажуємо $220/22=10$ вагонів 1-го типу. Слід зазначити, що у новій матриці (рис. 6.7) рядок 2 $(R_2=0)$ перестав бути «недостатнім», оскільки клітина 3–1 з «недостатнього» рядка 3 стала вільною.

У матриці (рис. 6.7) $\lambda^*=\lambda_3=1{,}378=20{,}667/15$. Для перенесення *Вантажу-3* з клітини 3–3 допустимою є клітина 1–3.

Оскільки в рядку 1 надлишок вагонів 1-го типу складає +4, то в клітину 1–3 з клітини 3–3 можна перенести тільки $4\cdot 15=60$ т *Вантажу-3*. При цьому для перевезення у вагонах 3-го типу залишиться $150-60=90$ т *Вантажу-3*, для чого необхідно $90/31\approx 3$ вагони 3-го типу. Нова матриця наведена на рис. 6.8.

Вагони	Вантаж-1 310 т	Вантаж-2 200 т	Вантаж-3 150 т	Вантаж-4 60 т	Вантаж-5 70 т	Зайнято вагонів	Баланс	Мітка
1-й тип 14 ваг.	22	8	15	7	0	0	+14	
2-й тип 3 ваг.	23,1 **3/90**	11,55	14,63	6,16	10,783	3	0	*
3-й тип 4 ваг.	23,1 **7/220**	16,1 **9/200**	21,7 **5/150**	7	8,4	21	–17	*
4-й тип 60 ваг.	20	9	14	7 **9/60**	12 **6/70**	15	+45	
λ	**1,05**	1,789	1,447					

Рис. 6.6. Розв’язання розподільної задачі (ітерація 4)

Вагони	Вантаж-1 310 т	Вантаж-2 200 т	Вантаж-3 150 т	Вантаж-4 60 т	Вантаж-5 70 т	Зайнято вагонів	Баланс	Мітка
1-й тип 14 ваг.	22 **10/220**	8	15	7	0	10	+4	
2-й тип 3 ваг.	22 **3/90**	11	13,933	5,867	10,27	3	0	
3-й тип 4 ваг.	22	15,333 **9/200**	20,667 **5/150**	6,667	8	14	–10	*
4-й тип 60 ваг.	20	9	14	7 **9/60**	12 **6/70**	15	+45	
λ		1,394	**1,378**					

Рис. 6.7. Розв’язання розподільної задачі (ітерація 5)

Вагони	Вантаж-1 310 т	Вантаж-2 200 т	Вантаж-3 150 т	Вантаж-4 60 т	Вантаж-5 70 т	Зайнято вагонів	Баланс	Мітка
1-й тип 14 ваг.	22 **10/220**	8	15 **4/60**	7	0	14	0	*
2-й тип 3 ваг.	22 **3/90**	11	13,933	5,867	10,27	3	0	*
3-й тип 4 ваг.	15,967	11,129 **9/200**	15 **3/90**	4,839	5,806	12	–8	*
4-й тип 60 ваг.	20	9	14	7 **9/60**	12 **6/70**	15	+45	
λ	1,1	1,237	**1,071**					

Рис. 6.8. Розв’язання розподільної задачі (ітерація 6)

У матриці на рис. 6.8 три рядки є «недостатніми»: рядок 3 з від'ємним балансом –8, а також рядки 1 та 2, у яких $R_1 = R_2 = 0$. У рядку 1 поточне значення навантаження $p_{13} = 15$ дорівнює значенню «навантаження» p_{33} у зайнятій клітині, що розташована в «недостатньому» рядку 3. Отже, рядок 1 стає «недостатнім». Тепер у рядку 2 поточне значення навантаження $p_{21} = 22$ дорівнює значенню «навантаження» p_{12} у зайнятій клітині, що розташована у новому «недостатньому» рядку 1, тобто рядок 2 також стає «недостатнім».

У матриці (див. рис. 6.8) $\lambda^* = \lambda_3 = 1{,}071 = 15/14$. У новій матриці (рис. 6.9) переносимо 90 т *Вантажу-3* з клітини 3–3 «недостатнього» рядка 3 у клітину 4–3 «надлишкового» рядка та для цього завантажуємо $90/14 = 7$ вагонів 4-го типу.

Вагони	Вантаж-1	Вантаж-2	Вантаж-3	Вантаж-4	Вантаж-5	Зайнято вагонів	Баланс	Мітка
	310 т	200 т	150 т	60 т	70 т			
1-й тип 14 ваг.	20,533 **10/220**	7,467	14 **4/60**	6,533	0	14	0	
2-й тип 3 ваг.	20,533 **3/90**	10,267	13	5,476	9,585	3	0	
3-й тип 4 ваг.	14,903	10,387 **9/200**	14	4,516	5,419	9	–5	*
4-й тип 60 ваг.	20	9	14 **7/90**	7 **9/60**	12 **6/70**	22	+38	
λ		**1,011**						

Рис. 6.9. Розв'язання розподільної задачі (ітерація 7)

Зазначимо, що в матриці на рис. 6.9 рядки 1 та 2 $(R_1 = R_2 = 0)$ стають «надлишковими», оскільки клітина 3–3 у «недостатньому» рядку 3 стала вільною.

У матриці (див. рис. 6.9) $\lambda^* = \lambda_2 = 1{,}011 = 10{,}387/10{,}267$, тобто необхідно перенести деяку частину *Вантажу-2* з клітини 3–2 у клітину 2–3, тобто перевантажити *Вантаж-2* з вагонів 3-го типу у вагони 2-го типу, але для цього вагони 2-го типу необхідно звільнити від *Вантажу-1* (90 т). Перевантажити 90 т *Вантажу-1* можна у вагони 1-го типу, але їх, у свою чергу, необхідно звільнити від *Вантажу-3*, перевантаживши 60 т *Вантажу-3* у вагони 4-го типу (див. рис. 6.9). Таким чином, під *Вантаж-3* використовуємо $(60+90)/14 \approx 11$ вагонів 4-го типу.

Усі наявні 14 вагонів 1-го типу завантажуємо $14 \cdot 22 = 308$ т *Вантажу-1*, тоді у вагонах 2-го типу залишається $310 - 308 = 2$ т *Вантажу-1*, для чого необхідно використати 1 вагон 2-го типу. Отже, для перевезення *Вантажу-2* залишається $3 - 1 = 2$ вагони 2-го типу, у які можна завантажити $2 \cdot 15 = 30$ т *Вантажу-2*. Таким чином, у вагонах 3-го типу залишається $200 - 30 = 170$ т *Вантажу-2*, для чого необхідно використати $170/23 \approx 8$ вагонів 3-го типу. Після перерозподілу вантажопотоків отримаємо нову матрицю, що наведена на рис. 6.10.

Зазначимо, що в новій матриці перший та другий рядки $\left(R_1 = R_2 = 0\right)$ стають «недостатніми»: для другого рядка $p_{22} = p_{32} = 10,267$ (клітина 3–2 у «недостатньому» рядку 3), для першого рядка $p_{11} = p_{21} = 20,533$ (клітина 2–2 у «недостатньому» рядку 2).

Вагони	Вантаж-1	Вантаж-2	Вантаж-3	Вантаж-4	Вантаж-5	Зайнято вагонів	Баланс	Мітка
	310 т	200 т	150 т	60 т	70 т			
1-й тип 14 ваг.	20,533 **14/308**	7,467	14	6,533	0	14	0	*
2-й тип 3 ваг.	20,533 **1/2**	10,267 **2/30**	13	5,476	9,585	3	0	*
3-й тип 4 ваг.	14,731	10,267 **8/170**	13,838	4,640	5,356	8	–4	*
4-й тип 60 ваг.	20	9	14 **11/150**	7 **9/60**	12 **6/70**	26	+34	
λ	**1,027**	1,141						

Рис. 6.10. Розв’язання розподільної задачі (ітерація 8)

У матриці на рис. 6.10 $\lambda^* = \lambda_1 = 1,027 = 20,533/20$, тобто необхідно перенести деяку частину *Вантажу-1* з клітини 2–1 у клітину 4–1, тобто перевантажити *Вантаж-1* з вагонів 2-го типу у вагони 4-го типу, але при цьому другий рядок стане «надлишковим». У цьому зв’язку необхідно деяку частину *Вантажу-2* перевантажити з вагонів 3-го типу («недостатній» рядок 3) у вагони 2-го типу, оскільки поточні значення норм завантаження по *Вантажу-2* у цих типів вагонів однакові: $p_{22} = p_{32} = 10,267$. Для завантаження *Вантажу-1* у кількості 2 т необхідно 1 вагон 4-го типу, а у звільнений вагон 2-го типу можна завантажити 15 т *Вантажу-2*; при цьому у вагонах 3-го типу залишиться $170 - 15 = 155$ т *Вантажу-2*, для чого необхідно $155/23 \approx 7$ вагонів. Нова матриця наведена на рис. 6.11.

Зауважимо, що перший рядок $\left(R_1 = 0\right)$ у матриці на рис. 6.11 став «надлишковим» внаслідок звільнення клітини 2–1 у «недостатньому» рядку 2.

У новій матриці (рис. 6.11) $\lambda^* = \lambda_2 = 1,111 = 10/9$, тобто необхідно перенести частину *Вантажу-2* з вагонів 3-го типу у вагони 4-го типу. У вагонах 3-го типу залишаємо таку частину *Вантажу-2*, яка завантажується в наявні 4 вагони за встановленою нормою: $4 \cdot 23 = 92$ т; отже, у вагони 4-го типу перевантажується $155 - 92 = 63$ т *Вантажу-2*, для чого необхідно $63/9 = 7$ вагонів (рис. 6.12).

Вагони	Вантаж-1	Вантаж-2	Вантаж-3	Вантаж-4	Вантаж-5	Зайнято вагонів	Баланс	Мітка
	310 т	200 т	150 т	60 т	70 т			
1-й тип 14 ваг.	20 **14/308**	7,273	13,637	6,363	0	14	0	
2-й тип 3 ваг.	20	10 **3/45**	12,633	5,334	9,336	3	0	*
3-й тип 4 ваг.	14,349	10 **7/155**	13,479	4,520	5,217	7	–3	*
4-й тип 60 ваг.	20 **1/2**	9	14 **11/150**	7 **9/60**	12 **6/70**	27	+33	
λ		**1,111**						

Рис. 6.11. Розв’язання розподільчої задачі (ітерація 9)

Вагони	Вантаж-1	Вантаж-2	Вантаж-3	Вантаж-4	Вантаж-5	Зайнято вагонів	Баланс	Мітка
	310 т	200 т	150 т	60 т	70 т			
1-й тип 14 ваг.	20 **14/308**	7,273	13,637	6,363	0	14	0	
2-й тип 3 ваг.	18	9 **3/45**	11,397	4,800	8,402	3	0	
3-й тип 4 ваг.	12,914	9 **4/92**	12,131	4,068	4,695	4	0	
4-й тип 60 ваг.	20 **1/2**	9 **7/63**	14 **11/150**	7 **9/60**	12 **6/70**	34	+26	
Разом	15/310	14/200	11/150	9/60	6/70	55	+26	

Рис. 6.12. Оптимальний план завантаження (ітерація 10)

План завантаження вагонів, наведений на рис. 6.12, є оптимальним, оскільки в ньому відсутні «недостатні» рядки; при цьому загальна кількість вагонів, яка використовується для перевезення заданого обсягу вантажів, становить 55 ваг. Наявні вагони 1-го, 2-го та 3-го типів задіяні повністю, окрім того, існує надлишок вагонів 4-го типу в розмірі 26 ваг. Середнє навантаження при реалізації отриманого плану перевезень буде максимальним і становить

$$\left(310+200+150+60+70\right)/55 = 790/55 = 14{,}36 \text{ т.}$$

Контрольні запитання та завдання

1. Навести приклади розподільної задачі на транспорті.
2. Що є вихідними даними до розподільної задачі?
3. Навести дві форми постановки розподільної задачі.
4. Постановка задачі про розподіл вагонів під завантаження.
5. Сформулюйте умови-обмеження та цільову функцію для задачі про розподіл вагонів під завантаження.
6. Яким даним відповідають рядки та стовпчики матриці завантаження при розв'язанні розподільної задачі методом розв'язувальних множників?
7. Що вказується в клітинах матриці завантаження при розв'язанні розподільної задачі методом розв'язувальних множників? Навести приклад матриці завантаження.
8. Порядок складання початкового плану розподілу вагонів при розв'язанні розподільної задачі методом розв'язувальних множників.
9. У якому випадку розв'язок розподільної задачі є оптимальним?
10. Які рядки матриці завантаження називаються «недостатніми», а які – «надлишковими»?
11. Пояснити випадок, коли в матриці завантаження розподільної задачі усі рядки є «недостатніми».
12. Як визначаються розв'язувальні множники в матриці завантаження при розв'язанні розподільної задачі?
13. Пояснити порядок перетворення матриці завантаження з використанням розв'язувальних множників.
14. Яким чином здійснюється перерозподіл обсягів вантажу між різними типами вагонів після перетворення матриці завантаження?
15. Які основні умови необхідно дотримувати при перерозподілі обсягів вантажу між різними типами вагонів у матриці завантаження?
16. У табл. 6.2 наведено дані про наявність порожніх вагонів різних типів на станції, обсяги різних вантажів, які необхідно вивезти зі станції, та про технічні норми завантаження вагонів вантажами. За допомогою методу розв'язувальних множників розподілити вагони кожного типу під різні вантажі таким чином, щоб використати мінімальну кількість вагонів.

Таблиця 6.2

Вихідні дані до задачі 16

Вагони		Вантаж-1 180 т	Вантаж-2 90 т	Вантаж-3 250 т	Вантаж-4 160 т	Вантаж-5 370 т
1-й тип	18	30	18	24	7	0
2-й тип	40	25	0	9	21	34
3-й тип	22	12	23	0	15	28
4-й тип	12	0	12	27	20	12

17. Протягом робочої зміни необхідно завантажити зі складу у вагони вантажі п’яти різних типів у обсягах Q_j. Вантажні роботи виконують навантажувачі трьох типів, кількість яких на складі N_i. Змінна продуктивність навантажувача *i*-го типу при завантаженні *j*-го вантажу складає p_{ij}. Необхідно закріпити навантажувачі за вантажами таким чином, щоб за зміну виконати план із завантаження вагонів, використавши при цьому мінімальну кількість навантажувачів. Вихідні дані до задачі наведено в табл. 6.3.

Таблиця 6.3

Вихідні дані до задачі 17

Навантажувачі		Вантаж-1 $Q_1 = 220$ т	Вантаж-2 $Q_2 = 150$ т	Вантаж-3 $Q_3 = 250$ т	Вантаж-4 $Q_4 = 120$ т	Вантаж-5 $Q_5 = 180$ т
1-й тип	$N_1 = 5$	64	45	0	70	55
2-й тип	$N_2 = 8$	52	0	68	47	32
3-й тип	$N_3 = 10$	48	38	55	62	44

18. Зі складу необхідно автомобільним транспортом вивезти вантажі п’яти типів у обсягах Q_j. На автотранспортному підприємстві у наявності є вантажні автомобілі чотирьох типів у кількості N_i. Обсяг *j*-го вантажу, який можна завантажити в автомобіль *i*-го типу, складає p_{ij}; при цьому використання для перевезення автомобіля *i*-го типу складає C_i. Необхідно за

допомогою методу розв’язувальних множників розподілити автомобілі кожного типу під різні вантажі таким чином, щоб загальна вартість перевезення була мінімальною. Вихідні дані до задачі наведено в табл. 6.4.

Таблиця 6.4

Вихідні дані до задачі 18

Автомобілі			Вантаж-1 $Q_1 = 50$ т	Вантаж-2 $Q_2 = 40$ т	Вантаж-3 $Q_3 = 30$ т	Вантаж-4 $Q_4 = 60$ т	Вантаж-5 $Q_5 = 45$ т
1-й тип	$N_1 = 20$	$C_1 = 8$	5	6	0	8	7
2-й тип	$N_2 = 22$	$C_2 = 6$	0	4	5	7	6
3-й тип	$N_3 = 12$	$C_3 = 10$	8	9	8	10	10
4-й тип	$N_4 = 18$	$C_4 = 5$	4	2	3	0	5

РОЗДІЛ 7

Задача про максимальний потік на транспортній мережі

7.1. Постановка задачі про максимальний потік

Під час планування перевезень виникають задачі розподілу загальних обсягів перевезень таким чином, щоб повністю використати пропускну здатність існуючої транспортної мережі. Така задача виникає, наприклад, при різкому зростанні обсягів перевезень, коли від відправника до одержувача необхідно доставити максимальний обсяг транспортної маси. Під терміном «транспортна маса» у цьому випадку можна розуміти як рухомий склад (автомобілі, поїзди, вагони), так і вантаж, що перевозиться. Таким чином, задача полягає в тому, щоб знайти максимальний обсяг транспортної маси, який можна перевезти від відправника до одержувача існуючою транспортною мережею, інакше кажучи, для заданої мережі необхідно знайти максимальний потік, що може бути через неї пропущений.

Вихідними даним до задачі про максимальний потік є: транспортна мережа з одним початковим пунктом (джерелом) s та кінцевим пунктом (стоком) t, а також із заданими значеннями пропускних здатностей для кожної ділянки (дуги) між пунктами мережі i та j як в одному напрямку – d_{ij}, так і у зворотному – d_{ji} (рис. 7.1). Потік транспортної маси пропускається від джерела до стоку; причому при пропуску потоку через проміжні пункти мережі його величина не змінюється. Задача полягає в знаходженні таких потоків по ділянках (дугах) мережі, щоб результуючий потік від джерела до стоку був максимальним [12, 13].

Виконаємо математичну постановку задачі про максимальний потік. Нехай транспортна мережа задана графом $G=(V,E)$, де V – множина вершин графа, E – множина дуг між цими вершинами. Кожна дуга (i, j) характеризується пропускною здатністю як у прямому напрямку – d_{ij}, так і у зворотному – d_{ji}. На графі виділимо такі вершини: s – джерело потоку; t – стік потоку; i, j – проміжні (транзитні) пункти пропуску потоку.

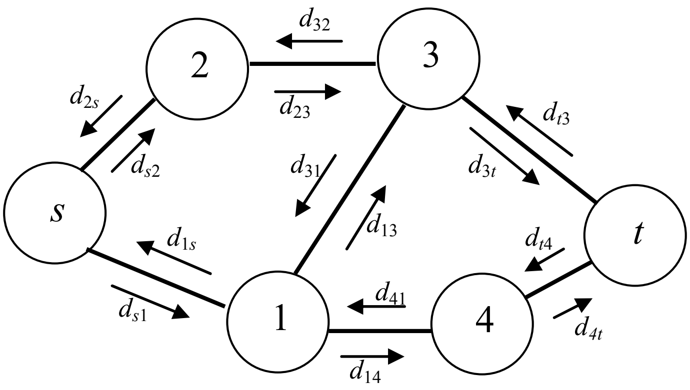


Рис. 7.1. Приклад транспортної мережі

Позначимо через x_{ij} обсяг транспортної маси (потік), що пропускається по дузі (i, j), тоді загальний потік, що виходить з джерела s та входить до стоку t, становить: $F = \sum_{j}^{k} x_{sj} = \sum_{i}^{r} x_{it}$, де k та r – кількість вершин, інцидентних (суміжних) відповідно джерелу s та стоку t. Необхідно знайти такі значення потоків x_{ij}, що пропускаються по кожній з дуг графа, які б забезпечували максимальне значення результуючого потоку, тобто $F \to \max$ за таких обмежень:

– величина потоку, що пропускається по дузі, не може перевищувати її пропускної здатності: $x_{ij} \le d_{ij}$ та $x_{ji} \le d_{ji}$;

– величина потоку, що входить у проміжний пункт i від l суміжних вершин, повинна дорівнювати величині потоку, яка виходить з цього пункту до n суміжних вершин: $\sum_{j}^{l} x_{ji} = \sum_{j}^{n} x_{ij}$.

Задача про максимальний потік на транспортній мережі може бути розв’язана за допомогою алгоритму Форда-Фалкерсона [8, 10, 12, 13].

7.2. Розв’язання задачі про максимальний потік у матричній формі

Алгоритм Форда-Фалкерсона для матричної постановки задачі. Зобразимо заданий граф транспортної мережі у вигляді матриці $D=\left[d_{ij}\right]$, елементами якої є значення пропускних здатностей відповідних дуг (i, j). Рядок i відповідає початковій вершині дуги (i, j), а стовпчик j – кінцевій вершині дуги (i, j). При цьому кожній дузі поставлено у відповідність два значення пропускної здатності – у прямому $\left(d_{ij}\right)$ та у зворотному напрямках $\left(d_{ji}\right)$ [8].

Крок 1. Знайти будь-який можливий шлях між вершинами s та t, по якому потік набуває додатного значення в напрямку $s \rightarrow t$. Для цього слід виконати обхід матриці D від початкового рядка s до кінцевого стовпчика t. При цьому перехід від вершини i до вершини j можливий тільки, якщо між ними є дуга з ненульовим значенням пропускної здатності, тобто в матриці D на перетині рядка i та стовпця j $d_{ij}>0$.

Якщо такого шляху не існує, перейти до *кроку 6*, інакше – до *кроку 2*.

Крок 2. У матриці D виділити значення d_{ij}, що відповідають пропускній здатності дуг шляху $s \rightarrow t$, знайденого на кроці 2, у прямому ($s \rightarrow t$) та зворотному ($t \rightarrow s$) напрямках.

Крок 3. Виділені в матриці значення d_{ij}, що відповідають пропускній здатності дуги в прямому напрямку ($s \rightarrow t$), позначити знаком «–», а значення, що відповідають зворотному напрямку ($t \rightarrow s$), – знаком «+».

Крок 4. Серед значень d_{ij}, позначених знаком «–», знайти мінімальне значення $\Delta=\min\left\{d_{ij}^{-}\right\}$.

Крок 5. Переписати матрицю D. При цьому: від усіх d_{ij}^{-}, позначених знаком «–», відняти значення Δ, отримане на кроці 4; до усіх d_{ij}^{+}, позначених знаком «+», додати значення Δ. Перейти до *кроку 1.*

Крок 6. Позначити останню матрицю, отриману на кроках 1–5, як $D^* = \left[d_{ij}^* \right]$, а вихідну матрицю як $D = \left[d_{ij} \right]$. Максимальний потік задається матрицею $X = \left[x_{ij} \right]$, кожний елемент якої визначається як:

$$x_{ij} = \begin{Bmatrix} d_{ij} - d_{ij}^*, & \text{якщо } d_{ij} > d_{ij}^* \\ 0, & \text{якщо } d_{ij} \le d_{ij}^* \end{Bmatrix}.$$

Крок 7. Максимальний потік з пункту s в пункт t визначається як

$$Z = \sum_i x_{si} = \sum_j x_{jt} ,$$

тобто дорівнює сумі елементів матриці X, отриманої на кроці 6, по рядку s або по стовпцю t.

Крок 8. Ненульові значення елементів матриці X визначають розподіл потоку по дугах заданої мережі.

Крок 9. Виконати перевірку отриманих результатів:

а) максимальне значення потоку Z являє собою суму всіх додатних значень Δ, визначених на кроці 4;

б) у отриманому на кроці 8 графі:

– сума x_{sj} для дуг, що виходять з початкової вершини s, повинна дорівнювати сумі x_{it} для дуг, що входять у кінцеву вершину t, і збігатися з величиною максимального потоку Z;

– для проміжних вершин сума x_{ij} усіх вхідних дуг повинна дорівнювати сумі x_{ij} усіх вихідних дуг.

в) для всіх дуг повинна дотримуватись умова $x_{ij} \le d_{ij}$.

Умова задачі. Залізничну мережу задано графом, який наведено на рис. 7.2. З урахуванням пропускних здатностей залізничних ділянок необхідно знайти величину максимального потоку поїздів, що може бути пропущений з пункту s до пункту t.

Розв'язання. Зобразимо заданий граф у вигляді матриці (рис. 7.3).

Крок 1. Як початковий шлях приймаємо $s \to 1 \to 4 \to t$.

Крок 2. Виділимо в матриці клітини (s, 1); (1, 4); (4, t) та (1, s); (4, 1); (t, 4).

Крок 3. Клітини (s, 1); (1, 4); (4, t) позначимо знаком «–», а клітини (1, s); (4, 1); (t, 4) – знаком «+» (рис. 7.4).

Крок 4. Серед клітин (s, 1); (1, 4); (4, t), що позначені знаком «–», визначимо мінімальне значення: $\Delta = \min\{10; 5; 13\} = 5$.

Крок 5. Перетворимо матрицю:
– від клітин (s, 1); (1, 4); (4, t), позначених «–», віднімемо $\Delta = 5$;
– до клітин (1, s); (4, 1); (t, 4), позначених «+», додамо $\Delta = 5$.
Нова матриця наведена на рис. 7.5.

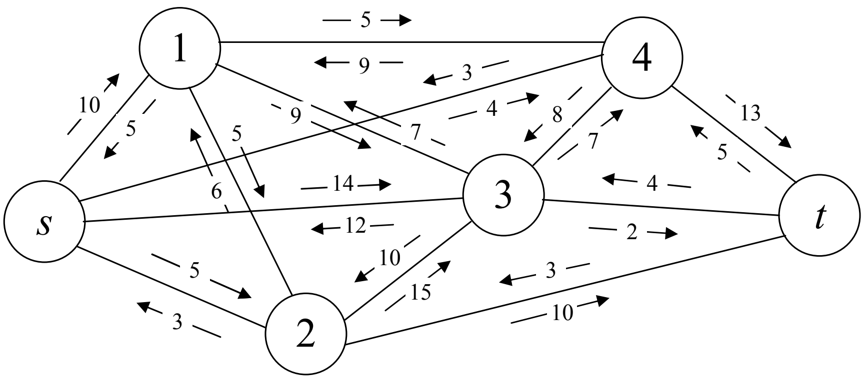


Рис. 7.2. Вихідна залізнична мережа

D=

	s	**1**	**2**	**3**	**4**	**t**
s		10	3	14	4	
1	5		5	9	5	
2	5	6		15		10
3	12	7	10		7	2
4	3	9		8		13
t			3	4	5	

Рис. 7.3. Вихідна матриця залізничної мережі

	s	**1**	**2**	**3**	**4**	**t**
s		10–	3	14	4	
1	5+		5	9	5–	
2	5	6		15		10
3	12	7	10		7	2
4	3+	9		8		13–
t			3	4	5+	

Рис. 7.4. Розрахункова матриця (ітерація 1)

	s	**1**	**2**	**3**	**4**	**t**
s		5	3	14–	4	
1	10		5	9	0	
2	5	6		15+		10–
3	12+	7	10–		7	2
4	3	14		8		8
t			3+	4	10	

$s \to 3 \to 2 \to t$
$\Delta = \min\{14,10,10\} = 10$

Рис. 7.5. Розрахункова матриця (ітерація 2)

Кроки 1–5 повторюємо до тих пір, поки на кроці 1 неможливо буде знайти шлях $s \to t$. Хід рішення наведено на рис. 7.5–7.9.

	s	1	2	3	4	t
s		5–	3	4	4	
1	10+		5	9–	0	
2	5	6		25		0
3	22	7+	0		7–	2
4	3	14		8+		8–
t			13	4	10+	

$s \to 1 \to 3 \to 4 \to t$

$\Delta = \min\{5,9,7,8\} = 5$

Рис. 7.6. Розрахункова матриця (ітерація 3)

	s	1	2	3	4	t
s		0	3	4	4–	
1	15		5	4	0	
2	5	6		25		0
3	22	12	0		2	2
4	3+	14		13		3–
t			13	4	15+	

$s \to 4 \to t$

$\Delta = \min\{4,3\} = 3$

Рис. 7.7. Розрахункова матриця (ітерація 4)

	s	1	2	3	4	t
s		0	3	4–	1	
1	15		5	4	0	
2	5	6		25		0
3	22+	12	0		2	2–
4	6	14		13		0
t			13	4	18+	

$s \to 3 \to t$

$\Delta = \min\{4,2\} = 2$

Рис. 7.8. Розрахункова матриця (ітерація 5)

D*=

	s	1	2	3	4	t
s		0	3	2	1	
1	15		5	4	0	
2	5	6		25		0
3	24	12	0		2	0
4	6	14		13		0
t			13	4	20	

Неможливо побудувати шлях $s \to t$

Рис. 7.9. Розрахункова матриця (ітерація 6)

Для останньої матриці (рис. 7.9) не існує шляху $s \to t$, оскільки всі елементи стовпця *t* дорівнюють нулю (тобто, вершина *t* не зв’язана з жодною іншою вершиною).

Крок 6. Таким чином, отримано матрицю D^*. Знайдемо матрицю *X*, що визначає максимальний потік: $X = D - D^*$, де D – початкова матриця (див. рис. 7.3). При цьому від'ємні значення x_{ij} замінюються нулями. Наприклад, значення в клітині (*s*, 3) отримане як $x_{s3} = d_{s3} - d^*_{s3} = 14 - 2 = 12$. Матриця *X* наведена на рис. 7.10.

X=

	s	**1**	**2**	**3**	**4**	***t***
s		10		12	3	
1				5	5	
2						10
3			10		5	2
4						13
t						

Рис. 7.10. Матриця поїздопотоків *X*

Крок 7. Максимальний потік поїздів *Z*, що їх можна пропустити з пункту *s* в пункт *t*, визначається як сума елементів матриці *X* по рядку *s* або стовпцю *t*:

$$Z = 10 + 12 + 3 = 25 \text{ поїздів або } Z = 10 + 2 + 13 = 25 \text{ поїздів.}$$

Крок 8. Розподіл максимального потоку поїздів по залізничній мережі показано на графі (рис. 7.11), що побудований на основі матриці *X*.

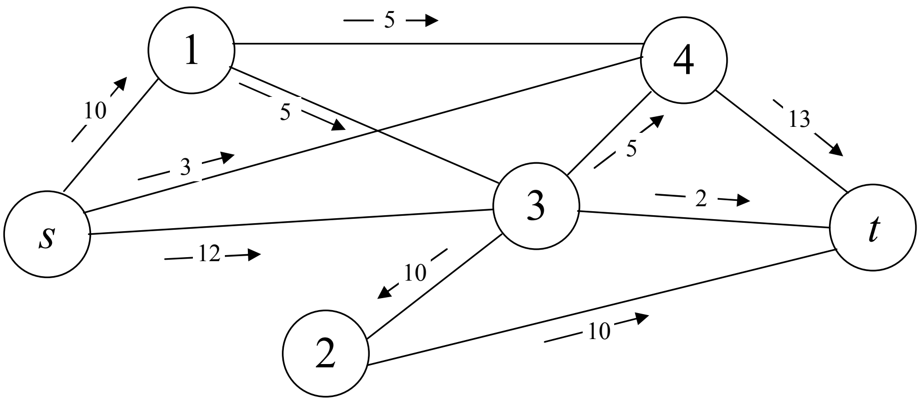


Рис. 7.11. Розподіл поїздопотоків по залізничній мережі

Крок 9. Виконаємо перевірку отриманих результатів:

а) максимальний потік $Z = \sum \Delta = 5 + 10 + 5 + 3 + 2 = 25$ поїздів;

б) перевіримо баланс для пунктів залізничної мережі (вершин графа):

– для пункту *s*: $\sum x_{sj} = 10 + 3 + 12 = 25$ поїздів;

– для пункту *t*: $\sum x_{it} = 13 + 2 + 10 = 25$ поїздів;

– для пункту 1: $\sum x_{i1} = 10$ поїздів, $\sum x_{1j} = 5 + 5 = 10$ поїздів;
– для пункту 2: $\sum x_{i2} = 10$ поїздів, $\sum x_{2j} = 10$ поїздів;
– для пункту 3: $\sum x_{i3} = 5 + 12 = 17$ поїздів, $\sum x_{3j} = 5 + 2 + 10 = 17$ поїздів;
– для пункту 4: $\sum x_{i4} = 5 + 3 + 5 = 13$ поїздів, $\sum x_{4j} = 13$ поїздів;

в) для всіх дуг поїздопотік не перевищує пропускної здатності.

Отже, для залізничної мережі, що задана на рис. 7.2, максимальний потік, що може бути пропущений від пункту *s* до пункту *t*, становить 25 поїздів.

7.3. Розв’язання задачі про максимальний потік на мережі

Алгоритм Форда–Фалкерсона на мережі. Задачу про максимальний потік зручно розв’язувати безпосередньо на мережі [12, 13]. При цьому алгоритм Форда–Фалкерсона, наведений вище, дещо змінюється, але його основна ідея залишається тією самою: послідовно на графі відшукуються можливі шляхи від джерела *s* до стоку *t*, при цьому дуги з повністю заповненою пропускною здатністю виключаються; процедура повторюється до тих пір, поки можливо побудувати шлях від *s* до *t*.

Крок 1. Знайти будь-який можливий шлях між вершинами *s* та *t*, по якому потік набуває додатного значення в напрямку $s \to t$. При цьому перехід від вершини *i* до вершини *j* можливий тільки, якщо між ними є дуга з ненульовим значенням пропускної здатності в необхідному напрямку $\left(d_{ij} > 0\right)$.

Якщо такого шляху не існує, перейти до *кроку 6*, інакше – до *кроку 2*.

Крок 2. На графі виділити дуги, що входять до знайденого шляху.

Крок 3. Для виділених дуг (i, j) значення пропускної здатності в прямому напрямку d_{ij} позначити знаком «–», а значення пропускної здатності у зворотному напрямку d_{ji} – знаком «+».

Крок 4. Серед значень d_{ij}, позначених знаком «–», знайти мінімальне значення $\Delta = \min\left\{d_{ij}^{-}\right\}$.

Крок 5. Перетворити граф. При цьому від усіх d_{ij}^{-}, позначених знаком «–», відняти значення Δ, отримане на кроці 4; до усіх d_{ij}^{+}, позначених знаком «+», додати значення Δ. Прибрати всі позначки «–» та «+». Перейти до *кроку 1*.

Крок 6. Пропускні здатності дуг графа, отриманого на кроках 1–5, позначити як d_{ij}^{*}, а пропускні здатності дуг у вихідному графі позначити як d_{ij}. Величина потоку x_{ij}, що пропускається по кожній дузі, визначається як:

$$x_{ij} = \begin{cases} d_{ij} - d_{ij}^{*}, & якщо\ d_{ij} > d_{ij}^{*} \\ 0, & якщо\ d_{ij} \le d_{ij}^{*} \end{cases}.$$

На основі отриманих значень x_{ij} будується граф, на якому відображається розподіл потоку по дугах.

Крок 7. Максимальний потік з пункту *s* в пункт *t* визначається як сума потоків, що пропускаються по дугах, які виходять з джерела *s*, або як сума потоків, що пропускаються по дугах, які входять у стік *t*:

$$Z = \sum_i x_{si} = \sum_j x_{jt}\ .$$

Крок 8. Виконати перевірку отриманих результатів (див. п. 7.2).

Умова задачі. Визначити максимальний потік та його розподіл для залізничної мережі, наведеної на рис. 7.2.

Розв'язання.

Крок 1. Як початковий шлях приймаємо $s \to 1 \to 4 \to t$.

Крок 2. Виділимо на графі (рис. 7.12) дуги (*s*, 1); (1, 4); (4, *t*).

Крок 3. Для дуг (*s*, 1); (1, 4); (4, *t*) позначимо знаком «–» значення пропускних здатностей у прямому напрямку d_{ij}, а знаком «+» значення пропускних здатностей у зворотному напрямку d_{ji}.

Крок 4. Серед значень d_{ij}, що позначені знаком «–», визначимо мінімальне значення: $\Delta = \min\{10; 5; 13\} = 5$.

Крок 5. Перетворимо граф; при цьому для виділених (*s*, 1); (1, 4); (4, *t*) від значень d_{ij}, позначених «–», віднімемо $\Delta = 5$, а до значень d_{ji}, позначених «+», додамо $\Delta = 5$. Новий граф наведено на рис. 7.13.

Кроки 1–5 повторюємо до тих пір, поки на кроці 1 неможливо буде знайти шлях $s \to t$. Хід рішення зображено на рис. 7.13–7.17.

Для останнього графа (рис. 7.17) не існує шляху $s \to t$, оскільки всі дуги, що входять до стоку *t*, мають нульову пропускну здатність $\left(d_{it} = 0\right)$.

Крок 6. Величину потоку x_{ij}, що пропускається по кожній дузі, визначаємо як різницю між значеннями пропускних здатностей дуг у вихідному графі d_{ij} (див. рис. 7.2) та графі, отриманому на останній ітерації d_{ij}^* (рис. 7.17); при цьому якщо $d_{ij} - d_{ij}^* < 0$, то $x_{ij} = 0$. Наприклад, для дуги (*s*, 4) $x_{s4} = 4 - 1 = 3$ поїзди. Отриманий таким чином граф з розподілом поїздопотоку наведено на рис. 7.11.

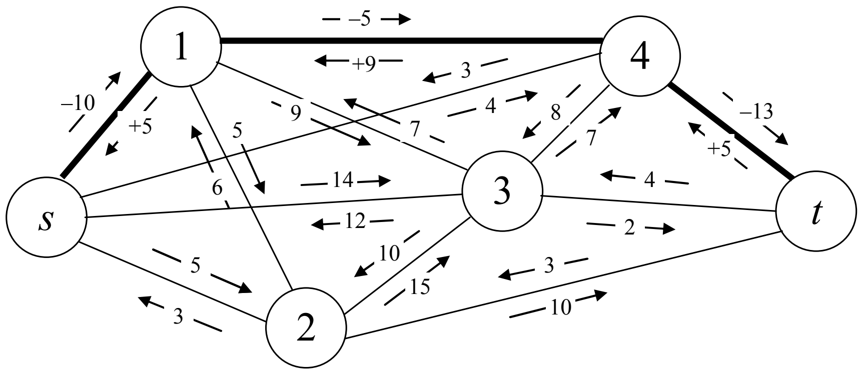


Рис. 7.12. Знаходження максимального потоку на мережі (ітерація 1)

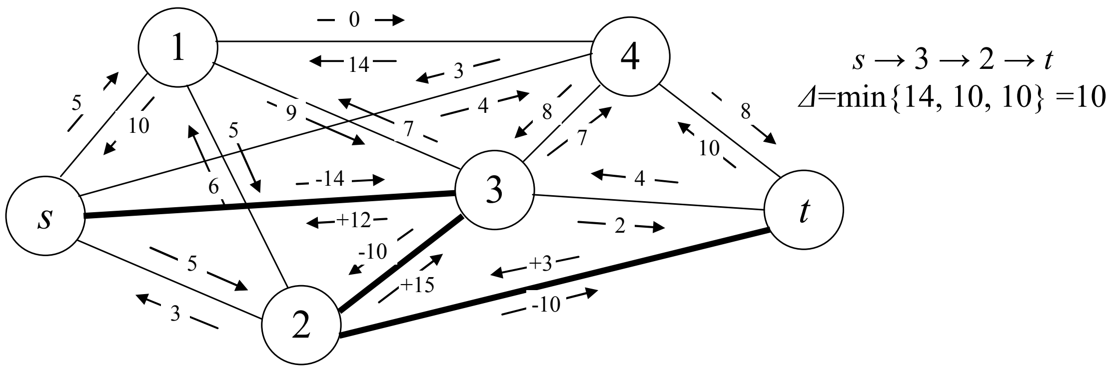


Рис. 7.13. Знаходження максимального потоку на мережі (ітерація 2)

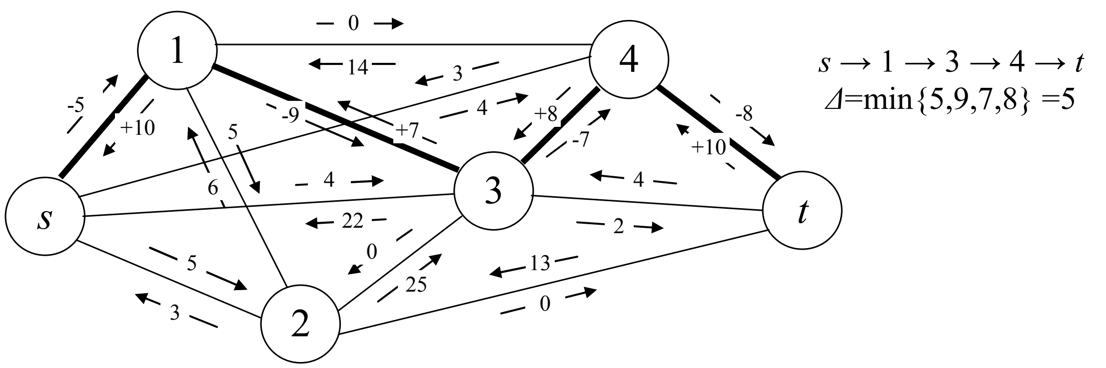


Рис. 7.14. Знаходження максимального потоку на мережі (ітерація 3)

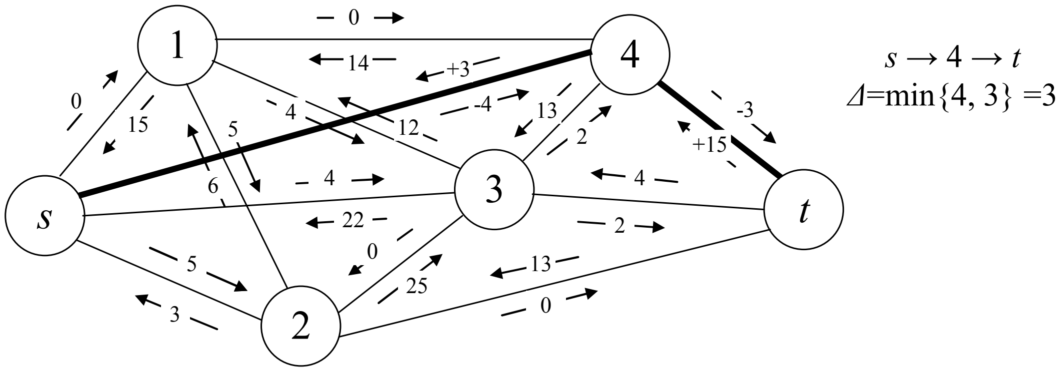


Рис. 7.15. Знаходження максимального потоку на мережі (ітерація 4)

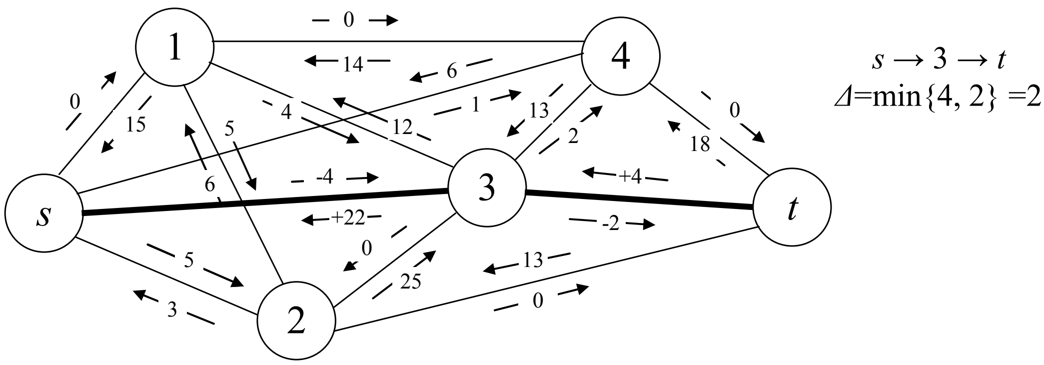


Рис. 7.16. Знаходження максимального потоку на мережі (ітерація 5)

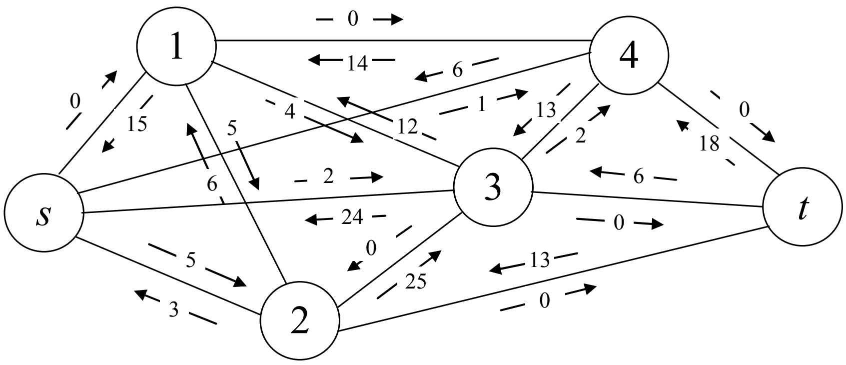


Рис. 7.17. Знаходження максимального потоку на мережі (ітерація 6)

Крок 7. Максимальний потік поїздів Z, які можна пропустити з пункту s в пункт t, визначається як сума поїздопотоків, що пропускаються від джерела s по дугах (s, 1), (s, 2), (s, 3) та (s, 4), або як сума поїздопотоків, що пропускаються до стоку t по дугах (2, t), (3, t) та (4, t). Відповідно до рис. 7.11:

$$Z = 10 + 0 + 12 + 3 = 25 \text{ поїздів або } Z = 10 + 2 + 13 = 25 \text{ поїздів.}$$

Крок 8. Перевірка результатів підтверджує їх правильність (див. п. 7.2).

Контрольні запитання та завдання

1. У яких випадках на транспорті виникає задача про максимальний потік? Навести приклади.
2. У чому полягає суть задачі про максимальний потік?
3. Сформулювати математичну постановку задачі про максимальний потік.
4. Сформулювати обмеження задачі про максимальний потік.
5. Як представити транспортну мережу у вигляді матриці?
6. Пояснити основну ідею алгоритму Форда–Фалкерсона розв'язання задачі про максимальний потік.
7. Яким чином здійснюється перерахунок значень пропускної здатності дуг транспортної мережі у матриці при розв'язанні задачі про максимальний потік алгоритмом Форда–Фалкерсона?
8. Як визначається величина потоку, що пропускається по кожній дузі при матричному та сітьовому розв'язанні задачі про максимальний потік алгоритмом Форда–Фалкерсона?
9. Як перевірити правильність розв'язку задачі про максимальний потік, отриманого з використанням алгоритму Форда–Фалкерсона?
10. На рис. 7.18 зображено схему залізничної мережі, на якій вказано пропускну здатність залізничних ділянок у двох напрямках. З урахуванням пропускних здатностей залізничних ділянок необхідно знайти величину максимального потоку поїздів, що може бути пропущений з пункту *s* до пункту *t*.

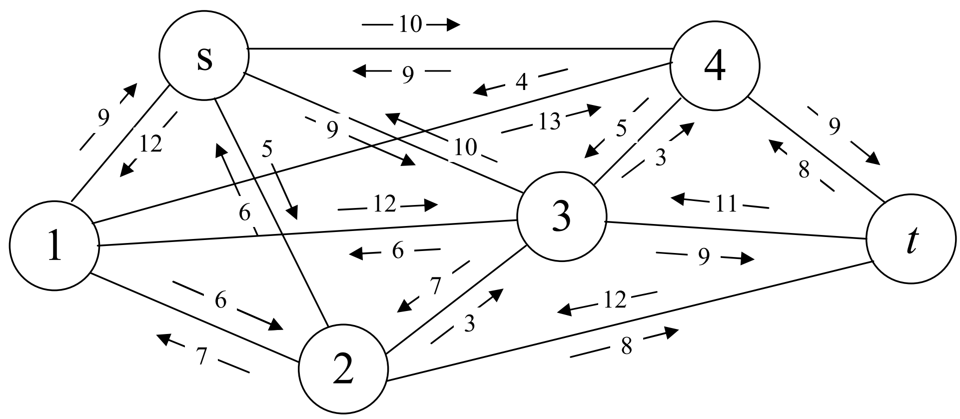


Рис. 7.18. Залізнична мережа до задачі 10

11. На рис. 7.19 зображено схему нафтопровідної мережі, на якій вказано пропускну здатність окремих ділянок нафтопроводу. Необхідно знайти максимальний обсяг нафти, що може бути перекачаний з пункту № 1 до пункту № 9.

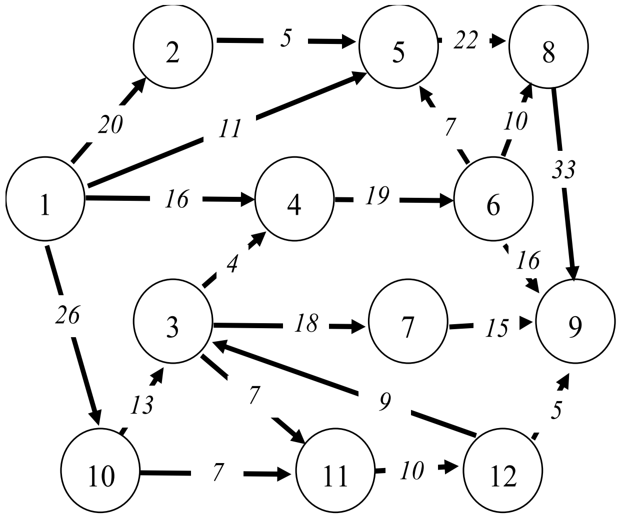


Рис. 7.19. Нафтопровідна мережа до задачі 11

12. На рис. 7.20 зображено схему залізничної мережі. Необхідно встановити, на скільки збільшиться максимальний потік поїздів, що може бути пропущений з пункту № 1 до пункту № 9, якщо між пунктами № 3 та № 7 спорудити залізничний міст з пропускною здатністю 20 поїздів.

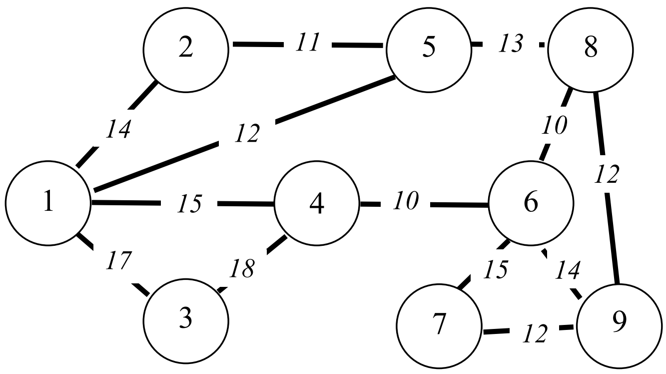


Рис. 7.20. Залізнична мережа до задачі 12

13. На рис. 7.21 зображено схему залізничної мережі, на якій вказано пропускну здатність залізничних ділянок у двох напрямках. З урахуванням пропускних здатностей залізничних діля-

нок необхідно знайти величину максимального потоку поїздів, що може бути пропущений з пункту *s* до пункту *t*; при цьому врахувати, що пропускна спроможність пункту № 2 складає 6 поїздів, а пункту № 3 – 8 поїздів.

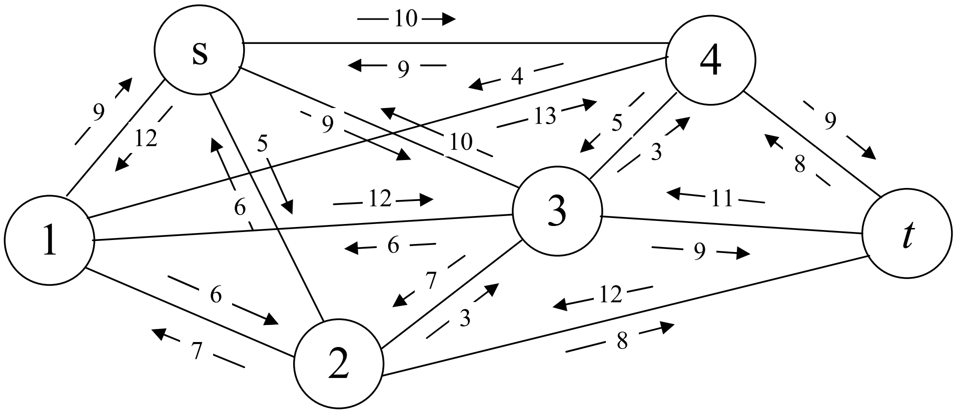


Рис. 7.21. Залізнична мережа до задачі 13

14. Інфраструктура морського порту, яка призначена для відвантаження залізної руди на судна, включає розгалужену систему конвеєрів. Схема розташування конвеєрів та їх пропускні здатності (тис. т/добу) наведені на рис. 7.22. У порту є один пункт *А*, призначений для відвантаження руди з підземних бункерів на конвеєри, та два пункти (причали) *Д* та *Е* завантаження руди на судна. До порту прибуло судно з вантажопідйомністю 50 тис. т. Визначити, до якого причалу необхідно подати судно, щоб тривалість його завантаження була мінімальною.

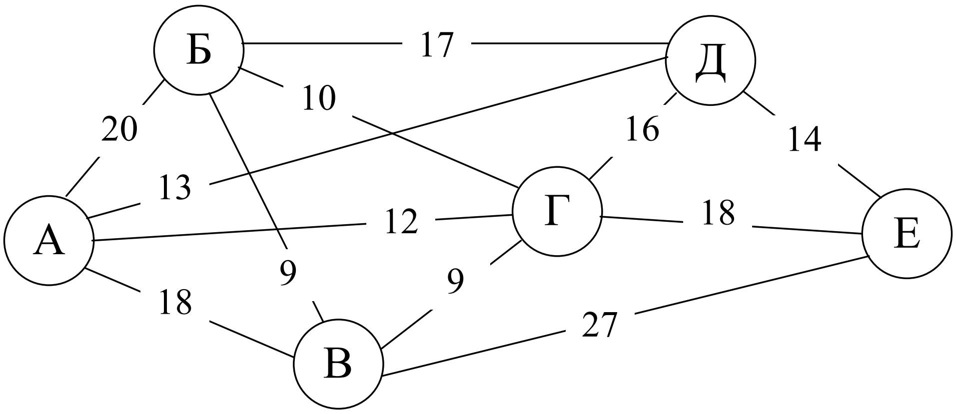


Рис. 7.22. Схема конвеєрної мережі до задачі 14

РОЗДІЛ 8

Задача про призначення

8.1. Постановка задачі про призначення

Нехай для виконання n різних робіт виділяється n працівників різної кваліфікації. Відомі працевитрати c_{ij} (або продуктивність) кожного j-го працівника при виконанні кожної i-ї роботи. Необхідно розподілити робітників за видами роботи таким чином, щоб загальні витрати на виконання комплексу робіт були мінімальними (або загальна продуктивність максимальною) [2, 3, 10, 11, 14].

Виконаємо математичну постановку задачі про призначення. Введемо змінні x_{ij}; причому $x_{ij} = 1$, якщо i-та робота закріплена за j-м працівником, $x_{ij} = 0$ – у протилежному випадку.

Сформулюємо обмеження задачі:

– за кожною роботою може бути закріплений тільки один працівник:

$$\sum_{j}^{n} x_{ij} = 1 \quad \left(i = 1, 2, \ldots, n\right); \tag{8.1}$$

– кожний працівник може бути закріплений тільки за однією роботою:

$$\sum_{i}^{n} x_{ij} = 1 \quad \left(j = 1, 2, \ldots, n\right). \tag{8.2}$$

Цільова функція задачі про призначення (залежно від фізичної сутності c_{ij}):

$$C = \sum_{i}^{n} \sum_{j}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min(\max).$$

Ця задача в наведеній постановці є задачею лінійного цілочислового програмування. Задача про призначення є частковим випадком транспортної задачі та може бути розв’язана у транспортній таблиці методом потенціалів. Однак особливості задачі про призначення дозволяють розв’язати її більш простими методами [2, 3, 11, 14]. До таких особливостей можна віднести:

– транспортна таблиця є квадратною матрицею (кількість робіт дорівнює кількості працівників);

– сума перевезень по кожному рядку транспортної таблиці дорівнює одиниці (8.1), сума по кожному стовпчику таблиці також дорівнює одиниці (8.2).

– перевезення x_{ij} можуть набувати значення тільки нуль або одиниця (булівські змінні).

Розв’язання задачі про призначення здійснюється в табличному вигляді у матриці вартості.

Допустимим є такий розв’язок задачі, при якому в кожному з n стовпчиків і в кожному з рядків матриці вартості буде тільки один зайнятий елемент. *Оптимальний* розв’язок задачі про призначення – це один з допустимих розв’язків, при якому загальна вартість зайнятих елементів матриці буде мінімальною (максимальною).

Серед найбільш поширених методів розв’язання задачі про призначення слід назвати метод К. Мака та Угорський метод.

8.2. Розв’язання задачі про призначення методом Мака

Метод, що розроблений К. Маком, є найбільш простим та інтуїтивно спрямованим; розв’язання задачі про призначення – це логічний процес послідовного розподілу в матриці вартості мінімальних елементів кожного рядка між стовпчиками для досягнення мінімального значення загальної вартості.

Нижче наведено алгоритм Мака для розв’язання задачі про призначення [2, 11]. На початку необхідно виділити в кожному рядку матриці вартості по одному мінімальному елементу (у виділеній клітині матриці $x_{ij} = 1$, у всіх інших – $x_{ij} = 0$). Стовпчики, у яких немає виділених елементів, називаються вільними, а інші – зайнятими.

Крок 1. Якщо в матриці немає жодного вільного стовпчика, то отримане рішення є оптимальним, інакше необхідно перейти до *кроку 2*.

Крок 2. Позначити * (зірочкою) будь-який стовпчик, у якому більше одного виділеного елемента.

Крок 3. Для всіх *i*-х рядків, у яких є виділені елементи в позначених * стовпчиках, знайти різницю Δ_i між мінімальним елементом *i*-го рядка серед непозначених * стовпчиків – a_i та мінімальним елементом *i*-го рядка серед позначених * стовпчиків – b_i, тобто $\Delta_i = a_i - b_i$.

Крок 4. Серед знайдених на кроці 3 різниць знайти мінімальну $\Delta = \min\{\Delta_i\}$.

Крок 5. Перетворити поточну таблицю, додавши до всіх елементів усіх позначених * стовпчиків Δ. Непозначені стовпчики залишаються без змін.

Крок 6. Елемент a_i у непозначеному стовпчику, який використовувався для розрахунку мінімальної різниці Δ, виділити підкресленням як альтернативний (тепер він має ту саму вартість, що й елемент b_i у позначеному * стовпчику).

Крок 7. Якщо альтернативний елемент a_i, отриманий на кроці 6, розташований у зайнятому стовпчику, то позначити цей стовпчик * (зірочкою) і перейти до *кроку 3*, інакше – перейти до *кроку 8*.

Крок 8. Показати стрілочкою перенесення по рядку виділеного елементу у вільний стовпчик в клітину з альтернативним елементом.

Крок 9. Якщо стовпчик, з якого було перенесено виділений елемент, став вільним, необхідно перейти до *кроку 8*, інакше – перейти до *кроку 10*.

Крок 10. Перетворити матрицю, зробивши виділеними відповідні альтернативні елементи. Прибрати всі позначки * і підкреслення та перейти до *кроку 1*.

Умова задачі. Між пунктами *А* і *Б* курсують парні та непарні пасажирські поїзди. Кожен поїзд може обслуговуватися бригадою локомотивного депо *А* чи *Б*. Тривалість руху поїзда між пунктами 4 години. Мінімальний час перебування бригади в пункті обороту $T_{\min} = 2$ години. Потрібно таким чином закріпити локомотивні бригади за поїздами, щоб їх загальний простій у пунктах обороту був мінімальним. Розклад руху поїздів на ділянці *А–Б* задано в табл. 8.1.

Таблиця 8.1

Розклад руху поїздів між пунктами *А* та *Б*

Пункти	Час відправлення						
А	1	3	5	14	17	21	22
Б	1	8	10	12	19	20	23

Розв'язання. Побудуємо графік руху поїздів на ділянці (рис. 8.1).

Визначимо можливі витрати часу бригад локомотивного депо *А* в пункті обороту *Б*. Наприклад, поїзд № 1 прибуває в пункт *Б* о 05:00. Якщо бригада буде відправлена з поїздом № 2 о 01:00, то її простій складе 20 годин. Ця величина занесена в ліву верхню клітину табл. 8.2 (ліва частина). При визначенні часу простою необхідно враховувати обмеження за мінімальним часом перебування бригад у пунктах обороту. Так, якщо бригада, що прибула з поїздом № 3, буде відправлятися з поїздом № 4, то її простій у пункті *Б* складатиме не 1 годину, а 25 годин. Можливі простої бригад з *А* для всіх інших непарних поїздів заносяться в ліву частину табл. 8.2, яка заповнюється по рядках. Можливі витрати часу бригад локомотивного депо *Б* в пункті обороту *А* визначаються аналогічно і заносяться в праву частину табл. 8.2, яка заповнюється по стовпчиках.

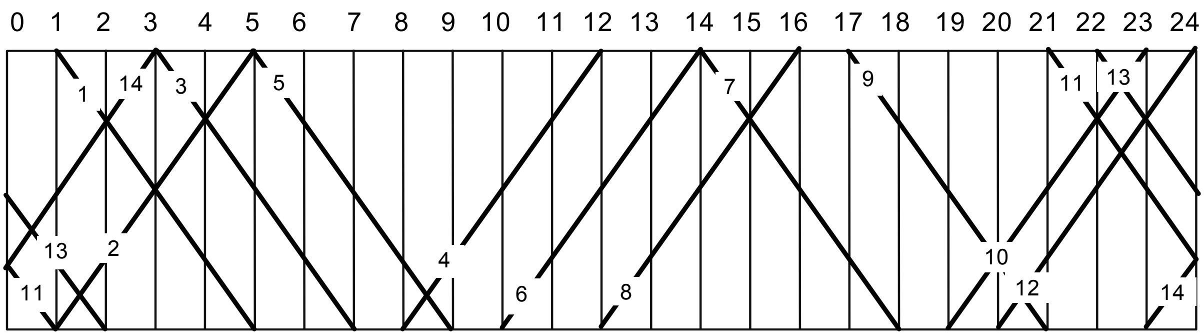


Рис. 8.1. Графік руху поїздів на ділянці *А–Б*

На основі порівняння значень простою бригад в пунктах обороту *А* та *Б* для однакових пар поїздів визначаються мінімальні простої бригад і заносяться в табл. 8.3. Пункт приписки бригади, для якої простій мінімальний, вказується у відповідній клітині табл. 8.3. Якщо простої бригад депо *А* та *Б* в пунктах обороту однакові, то у табл. 8.3 вказують «АБ».

На основі отриманої матриці можливих простоїв (табл. 8.3) з використанням алгоритму Мака необхідно знайти таке закріплення бригад за поїздами, яке забезпечує їх мінімальний простій у пунктах обороту. Приклад виконання розрахунків наведено на рис. 8.2.

Розглянемо порядок розв'язання детальніше. Виділимо в кожному рядку матриці вартості по одному мінімальному елементу (рис. 8.2, *ітерація 1*, *табл. 1*). Один із стовпчиків (наприклад, стовпчик 7), у якому кількість виділених елементів більше, ніж один, позначимо зірочкою (*). Для рядків 3 та 5, у яких є виділені елементи у поміченому (*) стовпчику 7, визначимо різницю між мінімальними елементами цих рядків та виділеними елементами: $\Delta_3 = 3 - 2 = 1$; $\Delta_5 = 3 - 2 = 1$ (рис. 8.2, *ітерація 1*, *табл. 1*). Серед отриманих різниць визначимо мінімальну $\Delta = 1$ (у нашому випадку, оскільки $\Delta_3 = \Delta_5 = 1$, то можна вибрати будь-який рядок, наприклад рядок 5).

Таблиця 8.2

Можливі витрати часу бригад у пунктах обороту

Витрати бригад з *А* в пункті обороту *Б*								Витрати бригад з *Б* в пункті обороту *А*							
№ поїзда	**2**	**4**	**6**	**8**	**10**	**12**	**14**	№ поїзда	**2**	**4**	**6**	**8**	**10**	**12**	**14**
1	20	3	5	7	14	15	18	**1**	20	13	11	9	2	25	22
3	18	25	3	5	12	13	16	**3**	22	15	13	11	4	3	24
5	16	23	25	3	10	11	14	**5**	24	17	15	13	6	5	2
7	7	14	16	18	25	2	5	**7**	9	2	24	22	15	14	11
9	4	11	13	15	22	23	2	**9**	12	5	3	25	18	17	14
11	24	7	9	11	18	19	22	**11**	16	9	7	5	22	21	18
13	23	6	8	10	17	18	21	**13**	17	10	8	6	23	22	19

Таблиця 8.3

Мінімальні витрати часу бригад у пунктах обороту

№ поїздів	2	4	6	8	10	12	14
1	20 АБ	3 А	5 А	7 А	2 Б	15 А	18 А
3	18 А	15 Б	3 А	5 А	4 Б	3 Б	16 А
5	16 А	17 Б	15 Б	3 А	6 Б	5 Б	2 Б
7	7 А	2 Б	16 А	18 А	15 Б	2 А	5 А
9	4 А	5 Б	3 Б	15 А	18 Б	17 Б	2 А
11	16 Б	7 А	7 Б	5 Б	18 А	19 А	18 Б
13	17 Б	6 А	8 АБ	6 Б	17 А	18 А	19 Б

Ітерація 1; таблиця 1

						*	
20	3	5	7	2	15	18	
18	15	3	5	4	3	16	
16	17	15	3	6	5	2	3-2=1
7	2	16	18	15	2	5	
4	5	3	15	18	17	2	3-2=1
16	7	7	5	18	19	18	
17	6	8	6	17	18	19	

Ітерація 1; таблиця 2

						*	
20	3	5	7	2	15	19	
18	15	3	5	4	3	17	
16	17	15	3	6	5	3	
7	2	16	18	15	2	6	
4	5	3	15	18	17	3	
16	7	7	5	18	19	19	
17	6	8	6	17	18	20	

Ітерація 2; таблиця 1

			*				
20	3	5	7	2	15	19	
18	15	3	5	4	3	17	
16	17	15	3	6	5	3	
7	2	16	18	15	2	6	
4	5	3	15	18	17	3	
16	7	7	5	18	19	19	7-5=2
17	6	8	6	17	18	20	6-6=0

Ітерація 2; таблиця 2

	*		*				
20	3	5	7	2	15	19	
18	15	3	5	4	3	17	
16	17	15	3	6	5	3	
7	2	16	18	15	2	6	2-2=0
4	5	3	15	18	17	3	
16	7	7	5	18	19	19	7-5=2
17	6	8	6	17	18	20	8-6=2

Ітерація 2; таблиця 3

	*		*		*		
20	3	5	7	2	15	19	
18	15	3	5	4	3	17	3-3=0
16	17	15	3	6	5	3	
7	2	16	18	15	2	6	6-2=4
4	5	3	15	18	17	3	
16	7	7	5	18	19	19	7-5=2
17	6	8	6	17	18	20	8-6=2

Ітерація 2; таблиця 4

	*	*	*		*		
20	3	5	7	2	15	19	
18	15	3	5	4	3	17	4-3=1
16	17	15	3	6	5	3	
7	2	16	18	15	2	6	6-2=4
4	5	3	15	18	17	3	3-3=0
16	7	7	5	18	19	19	16-5=11
17	6	8	6	17	18	20	17-6=11

Ітерація 2; таблиця 5

	*	*	*		*	*	
20	3	5	7	2	15	19	
18	15	3	5	4	3	17	4-3=1
16	17	15	3	6	5	3	5-3=2
7	2	16	18	15	2	6	6-2=4
4	5	3	15	18	17	3	4-3=1
16	7	7	5	18	19	19	16-5=11
17	6	8	6	17	18	20	17-6=11

Ітерація 2; таблиця 6

	*	*	*		*	*
20	4	6	8	2	16	20
18	16	4	6	4	4	18
16	18	16	4	6	6	4
7	3	17	19	15	3	7
4	6	4	16	18	18	4
16	8	8	6	18	20	20
17	7	9	7	17	19	21

Оптимальне рішення

20	4	6	8	2	16	20
18	16	4	6	4	4	18
16	18	16	4	6	6	4
7	3	17	19	15	3	7
4	6	4	16	18	18	4
16	8	8	6	18	20	20
17	7	9	7	17	19	21

Рис. 8.2. Приклад розв’язання задачі про призначення методом Мака

Перетворюємо матрицю, додавши до всіх елементів позначеного стовпця 7 мінімальну різницю $\Delta = 1$ (рис. 8.2, *ітерація 1; табл. 2*). У новій матриці підкреслимо як альтернативний елемент у клітині 5–3, який використано при визначенні мінімальної різниці. Тепер цей елемент має таке саме значення, як і виділений елемент 5–7 у рядку 5, тобто виділення елемента $\left(x_{ij} = 1\right)$ можна перенести (показано стрілкою) з клітини 5–7 в альтернативну клітину 5–3 (рис. 8.2, *ітерація 1; табл. 2*). Оскільки альтернативний елемент 5–3 знаходиться у вільному стовпчику, то в новій матриці цей елемент у рядку 5 стає виділеним замість елемента 5–7. Таким чином, отримуємо нову матрицю, у якій прибираємо всі позначки стовпчиків та підкреслення елементів (рис. 8.2, *ітерація 2; табл. 1*).

У новій матриці знову помічаємо (*) стовпець, у якому кількість виділених елементів більша за один (у нашому випадку – це стовпець 4). Далі діємо за алгоритмом Мака.

Зазначимо, що коли альтернативний елемент розташований у зайнятому стовпчику, то перенесення не відбувається, а цей стовпчик позначається (*), а потім виконується розрахунок різниць Δ_i з урахуванням нового позначеного (*) стовпчика. Так, для матриці, що наведена на рис. 8.2, *ітерація 2, табл. 2*, альтернативним є елемент у клітині 7–2, який розташований у зайнятому стовпчику 2; тому цей стовпчик помічається (*) і здійснюється новий розрахунок Δ_i.

У матриці, яка наведена на рис. 8.2, *ітерація 2, табл. 6*, після перенесення виділеного елемента з клітини 5–3 у клітину 5–1 стовпчик 3 стає вільним, однак у цьому стовпчику є альтернативний елемент у клітині 2–3, у який можна перенести виділений елемент з клітини 2–6. Оскільки при цьому стовпчик 6 стає вільним, то виділений елемент необхідно перенести в цей стовпчик у клітину 4–6 (там розташований альтернативний елемент) з клітини 4–2. У стовпчик 2, який стає вільним, виділений елемент переноситься в клітину 7–2 (альтернативний елемент) з клітини 7–4; при цьому в стовпчику 4 залишається один виділений елемент у клітині 6–4. Після перенесення виділених елементів отримуємо матрицю, у якій відсутні вільні стовпчики; при цьому в кожному рядку та в кожному стовпчику є тільки по одному виділеному елементу. Отже, ця матриця і є розв'язком задачі (рис. 8.2, *оптимальний розв'язок*).

Клітини, які є виділеними в матриці оптимального рішення, виділяємо також і в таблиці мінімально можливих витрат часу (табл. 8.4).

Проаналізуємо отриманий у табл. 8.4 результат. У рядку 1 виділеним є елемент «2Б» у стовпчику 10 – це означає, що бригада з пункту *Б* відправляється з поїздом № 10 та прямує в пункт *А*, де очікує 2 години та відправляється у пункт *Б* з поїздом № 1. Натомість, бригада з пункту *А* відправляється з поїздом № 3 (рядок 3, елемент «3А») та прямує у пункт *Б*, де після очікування тривалістю 3 години відправляється в пункт *А* з поїздом № 6.

Закріплення локомотивних бригад до поїздів, що виконане згідно з табл. 8.4, наведено на графіку руху поїздів (рис. 8.3).

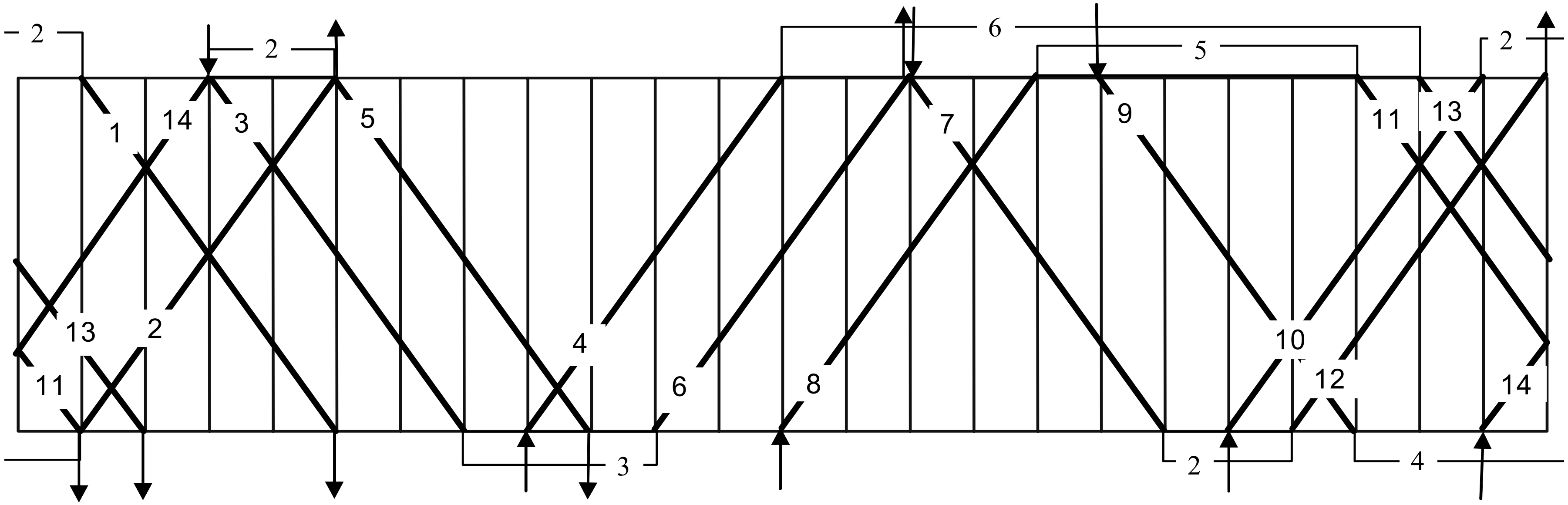


Рис. 8.3. Оптимальний графік закріплення локомотивних бригад до поїздів

Таблиця 8.4

Оптимальна підв'язка локомотивних бригад

№ поїздів	2	4	6	8	10	12	14
1	20 АБ	3 А	5 А	7 А	2 Б	15 А	18 А
3	18 А	15 Б	3 А	5 А	4 Б	3 Б	16 А
5	16 А	17 Б	15 Б	3 А	6 Б	5 Б	2 Б
7	7 А	2 Б	16 А	18 А	15 Б	2 А	5 А
9	4 А	5 Б	3 Б	15 А	18 Б	17 Б	2 А
11	16 Б	7 А	7 Б	5 Б	18 А	19 А	18 Б
13	17 Б	6 А	8 АБ	6 Б	17 А	18 А	19 Б

Таким чином, за допомогою розв'язання задачі про призначення методом Мака визначена оптимальна схема закріплення локомотивних бригад до пасажирських поїздів, що забезпечує мінімальний загальний час очікування бригадами в пунктах обороту, який становить: $C = 2 + 3 + 2 + 2 + 4 + 5 + 6 = 24$ години.

8.3. Розв'язання задачі про призначення Угорським методом

Алгоритм Угорського методу. Так званий Угорський метод [3, 5] часто дозволяє отримати рішення задачі про призначення за меншу кількість ітерацій порівняно з алгоритмом Мака. Цей алгоритм був розроблений і опублікований Гарольдом Куном у 1955 р. Сам Кун дав алгоритму назву «Угорський», тому що він значною мірою базувався на більш ранніх роботах двох угорських математиків – Денеша Кеніга і Ейгена Егервари. У 1957 р. професор Джеймс Манкрес показав, що цей алгоритм працює за поліноміальний час, тому в літературі він відомий не тільки як «Угорський», але і як «алгоритм Куна–Манкреса» або «алгоритм Манкреса». Втім, у 2006 р. з'ясувалося, що точно такий же алгоритм був винайдений за століття до Куна німецьким математиком Карлом Густавом Якобі. Справа в тому, що його робота «Про дослідження порядку системи звичайних довільних диференціальних рівнянь», надрукована посмертно у 1890 р., що містила, крім інших результатів, і поліноміальний алгоритм розв'язання задачі про призначення, була написана на латині, і її публікація пройшла непоміченою серед математиків.

Алгоритм Угорського методу складається з трьох етапів [3, 5, 14]:

Етап I:

Крок 1.1. Виконати редукцію рядків матриці вартості. Для цього потрібно знайти найменший елемент у кожному рядку матриці й відняти його від усіх елементів відповідного рядка.

Крок 1.2. Виконати редукцію стовпців матриці аналогічним чином.

Етап II:

Крок 2.1. Знайти рядок з **одним** нульовим елементом і відмітити (виділити) цей елемент, інакше – перейти до *кроку 2.4*.

Крок 2.2. Викреслити всі нульові елементи стовпця, у якому розташований відмічений елемент.

Крок 2.3. Виконувати *кроки 2.1* та *2.2* до тих пір, поки продовження цієї процедури виявиться неможливим. Якщо в кожному рядку та стовпці буде по одному відміченому елементу, то отриманий розв'язок є оптимальним, інакше – перейти до *кроку 2.4*.

Крок 2.4. Знайти стовпець з **одним** нульовим елементом і відмітити (виділити) цей елемент, інакше – перейти до *кроку 2.7*.

Крок 2.5. Викреслити всі нульові елементи рядка, у якому розташований відмічений елемент.

Крок 2.6. Виконувати *кроки 2.4* та *2.5* до тих пір, поки продовження цієї процедури виявиться неможливим. Якщо в матриці всі нульові елементі виявилися відміченими або викресленими, а отриманий розв'язок є неприпустимим, то перейти до **етапу III**, інакше – перейти до *кроку 2.1*. Якщо розв'язок є припустимим, то воно є оптимальним.

Крок 2.7. Знайти рядок з мінімальною кількістю нульових елементів та повідмітити лише один з них, а інші – викреслити. Також викреслити всі нульові елементи стовпця, у якому розташований відмічений елемент, і перейти до *кроку 2.1*.

Етап III:

Крок 3.1. Визначити кількість нульових елементів у кожному рядку та стовпці, які не викреслені.

Крок 3.2. Викреслити рядок або стовпець з максимальною кількістю нульових елементів. Якщо в матриці викреслені усі нульові елементи, то перейти до *кроку 3.3*, інакше – до *кроку 3.1*.

Крок 3.3. Від усіх невикреслених елементів відняти мінімальний невикреслений елемент та додати його до кожного елемента, розташованого на перетині двох ліній. Перейти до **етапу II**.

База	Споживач			
	1	2	3	4
А	68	72	75	83
Б	56	60	58	63
В	38	40	35	45
Г	47	42	40	45

Рис. 8.4. Матриця відстаней між базами та споживачами

Умова задачі. Компанія має 4 збутові бази та 4 замовлення, які необхідно доставити різним споживачам. Ємність складського приміщення кожної бази цілком достатня для того, що б вмістити одне з цих замовлень. Відстань між базами та споживачами наведена у вигляді матриці вартості (рис. 8.4). Потрібно розподілити замовлення між базами таким чином, щоб загальна відстань перевезень була мінімальною.

Розв'язання. Розв'язання задачі про призначення Угорським методом починається з редукції (зменшення) рядків та стовпців матриці вартості. З цією метою виконаємо пошук мінімального значення в кожному рядку матриці (рис. 8.5, *а*). Віднімаючи отримані значення від усіх елементів відповідних рядків, отримаємо матрицю, що зображена на рис. 8.5, *б*.

а

База	Споживач				min
	1	2	3	4	
А	68	72	75	83	68
Б	56	60	58	63	56
В	38	40	35	45	35
Г	47	42	40	45	40

б

База	Споживач			
	1	2	3	4
А	0	4	7	15
Б	0	4	2	7
В	3	5	0	10
Г	7	2	0	5

Рис. 8.5. Редукція рядків матриці вартості

Редукція стовпців виконується так само, як і редукція рядків матриці, але всі дії виконуються лише із стовпцями матриці. Так, після пошуку мінімального значення в кожному стовпці матриці (див. рис. 8.6, *а*), отримані значення віднімемо від всіх елементів відповідних стовпців. У результаті виконаних дій отримаємо зменшену матрицю, яка зображена на рис. 8.6, *б*.

У матриці (рис. 8.6, *б*) виконаємо пошук рядка з **одним** нульовим елементом. Нехай це буде рядок, що відповідає базі «А». У цьому рядку відмічаємо нульовий елемент, який розташований у стовпці, що відповідає споживачу «1» (див.

рис. 8.7, *табл. 1*). Це означає, що замовлення закріплено між базою збуту «А» та клієнтом «1». У стовпці 1 викреслюємо всі нульові елементи (клітина А–1). У матриці є ще один рядок з **одним** нульовим елементом (рядок 3, клітина В–3). Відмічаємо елемент В–3, а в стовпці 3 викреслюємо всі нульові елементи (див. рис. 8.7, *табл. 2*).

а

База	Споживач			
	1	2	3	4
А	0	4	7	15
Б	0	4	2	7
В	3	5	0	10
Г	7	2	0	5
min	0	2	0	5

б

База	Споживач			
	1	2	3	4
А	0	2	7	10
Б	0	2	2	2
В	3	3	0	5
Г	7	0	0	0

Рис. 8.6. Редукція стовпців матриці

Таблиця 1

База	Споживач			
	1	2	3	4
А	**0**	2	7	10
Б	~~0~~	2	2	2
В	3	3	0	5
Г	7	0	0	0

Таблиця 2

База	Споживач			
	1	2	3	4
А	**0**	2	7	10
Б	~~0~~	2	2	2
В	3	3	**0**	5
Г	7	0	~~0~~	0

Таблиця 3

База	Споживач			
	1	2	3	4
А	**0**	2	7	10
Б	~~0~~	2	2	2
В	3	3	**0**	5
Г	7	**0**	~~0~~	~~0~~

Рис. 8.7. Пошук розв’язку (ітерація 1)

Більше рядків з одним нульовим елементом в матриці немає, але є стовпці – це стовпці 2 та 4. Відмічаємо один з елементів, наприклад елемент Г–2, при цьому в рядку Г викреслюємо всі нульові елементи (див. рис. 8.7, *табл. 3*). У результаті виконаних дій отримано розв’язок, який є недопустимим, оскільки не за всіма базами та споживачами закріплено по одному замовленню.

Згідно з алгоритмом Угорського методу у випадку отримання недопустимого розв’язку (етап III) потрібно виконати перетворення матриці. З цією метою послідовно викреслюють рядки або стовпці матриці, які мають найбільшу кількість нульових елементів. Вказану процедуру виконують до тих пір, поки в матриці не будуть викреслені всі нульові елементи. Так, рядок Г має 3 нульових елементи, а стовпці 1 та 3 – по 2 елементи. Отже, викреслюємо рядок Г (див. рис. 8.8, *табл. 1*). Далі послідовно викреслюємо стовпці 1 та 3 (див. рис. 8.8, *табл. 2*).

Серед усіх елементів, через які не проходять лінії викреслювання, знаходимо мінімальне значення, яке складає $v = 2$. Значення елементів, через які не проходять лінії, зменшуємо на величину v. Для елементів, які розташовані на перетині ліній викреслювання (клітини Г–1 та Г–3), значення збільшуємо на величину v. Значення інших елементів матриці залишаємо без змін. У результаті отримаємо нову матрицю, яка зображена на рис. 8.8, *табл. 3*.

Таблиця 1

База	Споживач			
	1	2	3	4
А	**0**	2	7	10
Б	0	2	2	2
В	3	3	**0**	5
Г	7	**0**	0	0

Таблиця 2

База	Споживач			
	1	2	3	4
А	**0**	2	7	10
Б	0	2	2	2
В	3	3	**0**	5
Г	7	**0**	0	0

Таблиця 3

База	Споживач			
	1	2	3	4
А	0	0	7	8
Б	0	0	2	0
В	3	1	0	3
Г	9	0	2	0

Рис. 8.8. Перетворення матриці

Пошук розв'язку з новою (перетвореною) матрицею виконується відповідно до алгоритму Угорського методу (етапи I та II). Послідовність пошуку розв'язку наведена на рис. 8.9.

Отриманий розв'язок (рис. 8.9, *табл. 4*) є оптимальним, тому відмічені елементи необхідно перенести на початкову матрицю відстаней (рис. 8.10).

Таким чином, загальна відстань перевезень між базами та споживачами буде мінімальною і складає $L = 56 + 72 + 35 + 45 = 208$ км.

Задачу про призначення також можна розв'язати з використанням електронних таблиць MS Excel (див. дод. А).

Таблиця 1

База	Споживач			
	1	2	3	4
А	~~0~~	**0**	7	8
Б	0	~~0~~	2	0
В	3	1	0	3
Г	9	~~0~~	2	0

Таблиця 2

База	Споживач			
	1	2	3	4
А	~~0~~	**0**	7	8
Б	0	~~0~~	2	0
В	3	1	**0**	3
Г	9	~~0~~	2	0

Таблиця 3

База	Споживач			
	1	2	3	4
А	~~0~~	**0**	7	8
Б	**0**	~~0~~	2	~~0~~
В	3	1	**0**	3
Г	9	~~0~~	2	0

Таблиця 4

База	Споживач			
	1	2	3	4
А	~~0~~	**0**	7	8
Б	**0**	~~0~~	2	~~0~~
В	3	1	**0**	3
Г	9	~~0~~	2	**0**

Рис. 8.9. Пошук розв’язку (ітерація 2)

База	Споживач			
	1	2	3	4
А	68	**72**	75	83
Б	**56**	60	58	63
В	38	40	**35**	45
Г	47	42	40	**45**

Рис. 8.10. Оптимальний розв’язок

Контрольні запитання та завдання

1. Дати математичну постановку задачі про призначення.
2. Навести приклади задачі про призначення.
3. Сформулювати обмеження задачі про призначення.
4. Які особливості задачі про призначення на відміну від основної задачі лінійного програмування?
5. Який розв’язок задачі про призначення є допустимим?
6. Який розв’язок задачі про призначення є оптимальним?
7. Скільки базисних змінних повинно бути при розв’язанні задачі про призначення? Яких значень можуть набувати базисні змінні?

8. Скільки зайнятих клітин (виділених) повинно бути в кожному рядку таблиці при розв'язанні задачі про призначення методом Мака?
9. Які стовпчики в таблиці називають «зайнятими», а які вільними при розв'язанні задачі про призначення методом Мака?
10. Скільки вільних стовпчиків має бути в таблиці, що відповідає оптимальному розв'язку, при розв'язанні задачі про призначення методом Мака?
11. Серед яких рядків визначається мінімальна різниця при розв'язанні задачі про призначення методом Мака?
12. На скільки змінюються значення відмічених та невідмічених стовпчиків після перетворення таблиці при розв'язанні задачі про призначення методом Мака?
13. Що розуміють під «альтернативним елементом» при розв'язанні задачі про призначення методом Мака?
14. Які дії передбачає алгоритм Мака, якщо альтернативний елемент розташований у зайнятому стовпчику? У вільному стовпчику?
15. У скільки етапів розв'язується задача про призначення Угорським методом?
16. Що таке редукція матриці вартості в Угорському методі?
17. Які елементи матриці відмічаються на етапі II Угорського методу?
18. Як здійснюється перетворення матриці вартості на етапі III Угорського методу?
19. У якому випадку отриманий за допомогою Угорського методу розв'язок задачі про призначення є оптимальним?
20. На рис. 8.11 задана матриця вартостей до задачі про призначення. Привести цю задачу до основної задачі лінійного програмування (записати відповідні обмеження і цільову функцію) та отримати її числовий розв'язок.

5	8
4	5

Рис. 8.11

21. Між пунктами *А* і *Б* курсують парні та непарні пасажирські поїзди. Кожен поїзд може обслуговуватися бригадою локомотивного депо *А* чи *Б*. Тривалість руху поїзда між пунктами 4 години. Мінімальний час перебування бригади в пункті обороту $T_{\min} = 1$ година. Потрібно таким чином закріпити локомотивні бригади за поїздами, щоб їх загальний простій у пунктах

обороту був мінімальним. Розклад руху поїздів на ділянці *А–Б* задано в табл. 8.5. Задачу розв’язати методом Мака та Угорським методом; порівняти швидкість отримання розв’язку цими методами.

Таблиця 8.5

Розклад руху поїздів до задачі 21

Пункти	Час відправлення						
А	4	5	6	14	15	20	21
Б	1	6	10	16	17	21	23

22. Компанія має 5 збутових баз та 5 замовлень, які необхідно доставити різним споживачам. Ємність складського приміщення кожної бази цілком достатня для того, щоб вмістити одне з цих замовлень. Відстані між базами та споживачами задана у вигляді матриці вартості (табл. 8.6). Необхідно розподілити замовлення між базами таким чином, щоб загальна відстань перевезень була мінімальною.

Таблиця 8.6

Матриця вартості до задачі 22

База	Споживачі				
	1	2	3	4	5
1	9	20	60	15	21
2	38	71	69	49	60
3	28	13	80	28	34
4	58	34	13	37	25
5	30	8	53	20	21

23. На вантажному складі зберігається п’ять типів вантажів, які необхідно завантажити у вагони. Вантажні операції можуть здійснювати п’ять навантажувачів. Внаслідок відмінностей у технічних характеристиках навантажувачів продуктивність їх роботи з різними вантажами є різною; відповідні значення продуктивності роботи навантажувачів (т/год) задані

у табл. 8.7. Необхідно таким чином закріпити навантажувачі за вантажами, щоб за час $T = 3$ год загальні обсяги навантаження у вагони були максимальними.

Таблиця 8.7

Вихідні дані до задачі 23

Навантажувачі	Вантажі					
	1	2	3	4	5	6
1	32	25	17	36	20	44
2	28	22	26	18	15	24
3	33	27	31	25	16	39
4	40	21	28	33	22	35
5	28	31	35	25	19	30
6	25	19	29	22	15	27

24. Автотранспортна компанія повинна забрати п’ять вантажів з пунктів зберігання *А*, *Б*, *В*, *Г*, *Д* та перевезти їх у відповідні пункти призначення. Компанія для виконання замовлення виділила п’ять автомобілів двох типів, які розташовані в пунктах стоянки *К*, *Л*, *М*, *Н*, *О*. Кожен автомобіль може перевозити будь-який з вантажів. Вартість 1 км пробігу для автомобіля першого типу складає 20 грн у порожньому стані та 40 грн у завантаженому, а для автомобіля другого типу – відповідно 30 та 60 грн. Відстані між пунктами, а також розташування автомобілів у гаражах задані в табл. 8.8. Необхідно таким чином закріпити автомобілі за вантажами, щоб загальна вартість перевезень була мінімальною.

Таблиця 8.8

Вихідні дані до задачі 24

Пункти стоянки автомобілів		Пункти зберігання вантажу				
		А	*Б*	*В*	*Г*	*Д*
		Відстань до пунктів призначення, км				
		60	30	100	50	40
Пункт	Тип	Відстань до пунктів стоянки автомобілів, км				
К	1	30	20	40	10	20
Л	2	30	10	30	20	30
М	1	40	10	10	40	10
Н	1	20	20	40	20	30
О	2	30	20	10	30	40

РОЗДІЛ 9

Задача комівояжера

9.1. Постановка задачі комівояжера

В 1859 р. У. Гамільтон сформулював задачу під назвою «Навколосвітня подорож», метою якої було відшукати такий найкоротший маршрут, щоб одноразово відвідати кожний заданий населений пункт і повернутися у вихідний пункт. Вказана задача дала розвиток цілому напрямку в теорії графів, що відомий як пошук циклів Гамільтона на графах. Цикл Гамільтона для графа з n вершин може бути представлений множиною пар суміжних вершин графа:

$$\left\{\left(i_1, i_2\right); \left(i_2, i_3\right), \ldots, \left(i_{n-1}, i_n\right); \left(i_{n-1}, i_1\right)\right\}.$$

Задача про цикли Гамільтона в теорії графів отримала різні узагальнення. Одне з цих узагальнень – *задача комівояжера*, що в різних модифікаціях досить часто виникає в транспортній логістиці при плануванні перевезень. Задача комівояжера є модифікованою задачею про призначення, однак, у цьому випадку прив'язка між пунктами повинна утворювати замкнений цикл.

Загальна постановка задачі комівояжера така [9, 13, 15].

Комівояжер (з франц. *commis voyageur* – мандрівний торговець) повинен вийти з першого міста, відвідати по одному разу кожне з n міст і повернутися в перше місто. Відстані між містами відомі. Необхідно відшукати такий маршрут відвідування міст, щоб замкнутий шлях комівояжера був найкоротшим.

Виконаємо математичну постановку задачі.

Нехай є n міст. Відомі відстані між містами, що задані матрицею $C = \left[c_{ij}\right]$, причому в загальному випадку $c_{ij} \neq c_{ji}$, а також $c_{ij} = \infty$ та $c_{ji} = \infty$, якщо прямого зв'язку між містами i та j не існує. Необхідно знайти маршрут (цикл) найменшої довжини, що забезпечує відвідування кожного міста по одному разу.

Уведемо булівські змінні: $x_{ij} = 1$, якщо в маршрут (цикл) включена ділянка між містами *i* та *j*; $x_{ij} = 0$, якщо ділянку між містами *i* та *j* не включено до маршруту. Сформулюємо обмеження задачі:

– з кожного міста повинен бути тільки один виїзд:

$$\sum_{j}^{n} x_{ij} = 1 \quad \left(i = 1, 2, \ldots, n\right); \tag{9.1}$$

– у кожне місто має бути тільки один заїзд:

$$\sum_{i}^{n} x_{ij} = 1 \quad \left(j = 1, 2, \ldots, n\right); \tag{9.2}$$

– для того, щоб отримане рішення обов'язково забезпечувало замкнений цикл, який включає *n* міст (повний цикл), введемо змінні u_i $\left(i = 2, 3, \ldots, n\right)$ та накладемо на них $\left(n-1\right)^2 - \left(n-1\right)$ таких обмежень:

$$u_i - u_j \le n - 1. \tag{9.3}$$

Вказані обмеження виключають усі підцикли та при цьому не виключають жодного повного циклу.

Цільова функція задачі $C = \sum_{i}^{n} \sum_{j}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min$.

Задача комівояжера в наведеній постановці є задачею лінійного програмування. Однак, зважаючи на її особливості (булівські змінні, обмеження за сумами, необхідність знаходження повного циклу), для її розв'язання розроблені спеціальні методи. Очевидно, що задача комівояжера може бути розв'язана простим перебором усіх можливих варіантів маршруту, але зі збільшенням кількості пунктів *n* кількість варіантів швидко зростає (дорівнює $(n-1)!$). Так, для мережі з 5 пунктів загальна кількість варіантів складає 24, а для мережі з 10 пунктів – уже 362 880. Для розв'язання задачі комівояжера застосовуються комбінаторні методи, у яких повний перебір варіантів замінюється цілеспрямованим перебором. Одним з таких методів є метод «гілок та меж».

9.2. Метод «гілок та меж» для задачі комівояжера

Алгоритм методу «гілок та меж». Загальна ідея методу «гілок та меж» така [3, 13]. Потрібно розділити велику кількість варіантів, що перебираються, на класи й отримати певні оцінки (знизу – у задачі мінімізації, зверху – у задачі максимізації) для цих класів, щоб мати можливість відкидати варіанти не по одному, а цілими класами. Складність полягає в тому, щоб знайти такий поділ на класи (гілки) і такі оцінки (межі), щоб процедура була ефективною.

Загальний алгоритм методу «гілок та меж» такий.

Крок 1. Побудова матриці вартостей.

Крок 2. Знаходження мінімуму по кожному стовпчику матриці.

Крок 3. Редукція стовпчиків матриці (мінімальний елемент стовпчика віднімається від кожного елемента цього стовпчика).

Крок 4. Знаходження мінімуму по кожному рядку матриці.

Крок 5. Редукція рядків матриці.

Крок 6. Розрахунок оцінок для нульових клітин матриці.

Крок 7. Редукція матриці.

Крок 8. Якщо повний шлях не знайдено, перейти до *кроку 2*, інакше – до *кроку 9*.

Крок 9. Розрахунок підсумкової довжини маршруту.

Детально розглянемо алгоритм методу «гілок та меж» на прикладі.

Умова задачі. На контейнерну площадку для вивантаження прибуває вагон (або група вагонів) з контейнерами. Кожний контейнер (2, 3, 4, 5) необхідно вивантажити на відповідну секцію складу (6, 7, 8, 9) згідно з планом, що наведений на рис. 9.1.

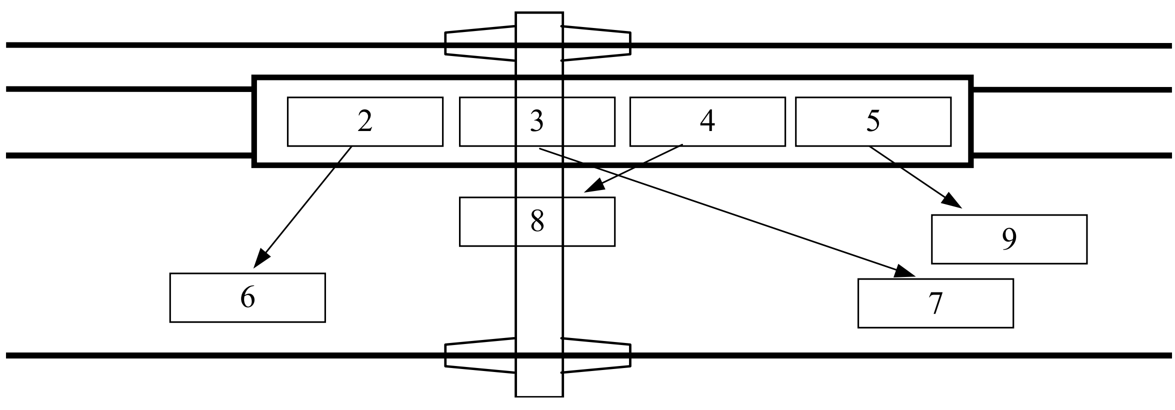


Рис. 9.1.Схема розвантаження контейнерів на склад

Тривалості пробігу крана наведені в табл. 9.1. Необхідно визначити оптимальну черговість вивантаження, яка забезпечить мінімальну тривалість вантажних операцій, якщо в початковий момент кран перебуває в стані 1.

Таблиця 9.1

Тривалості пробігу крана

Від	До							
	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0,5	0	0,5	1,0	–	–	–	–
2	–	–	–	–	5,0	–	–	–
3	–	–	–	–	–	6,0	–	–
4	–	–	–	–	–	–	2,3	–
5	–	–	–	–	–	–	–	2,5
6	–	5,2	6,0	6,5	–	–	–	–
7	6,6	–	5,0	4,0	–	–	–	–
8	2,5	2,0	–	3,5	–	–	–	–
9	6,5	5,9	5,6	–	–	–	–	–

Розв'язання. Тривалість виконання операцій вивантаження контейнерів однакова для всіх варіантів, тому достатньо оптимізувати напрямок повернення крана за черговим контейнером після вивантаження попереднього. Операції руху візка крана до контейнера та його переміщення до місця розташування на складі поєднані в табл. 9.2 в одну операцію. Візок крана з положення 1 забирає контейнер № 2 та вивантажує його на місце 6, тривалість перевантаження складає $t_{1\to 6} = t_{1\to 2} + t_{2\to 6} = 0,5 + 5 = 5,5$ хв. Повернення після вивантаження з 7-го місця за контейнером № 2 і переміщення його на місце вивантаження 6 триває $t_{7\to 6} = t_{7\to 2} + t_{2\to 6} = 6,6 + 5 = 11,6$ хв. Повернення після вивантаження з 8-го місця за контейнером № 2 і переміщення його на місце вивантаження 6 триває $t_{8\to 6} = t_{8\to 2} + t_{2\to 6} = 2,5 + 5 = 7,5$ хв. Повернення після вивантаження з 9-го місця за контейнером № 2 і переміщення його на місце вивантаження 6 триває $t_{9\to 6} = t_{9\to 2} + t_{2\to 6} = 6,5 + 5 = 11,5$ хв. Підсумкова матриця пробігів наведена в табл. 9.2.

Задача комівояжера розв'язується методом «гілок та меж». При цьому перед кожною черговою ітерацією визначається верхня межа розв'язку B, тобто найкраще рішення, яке відомо на даний момент. Далі виконується спрямований перебір варіантів, на кожному кроці якого визначається нижня межа розв'язку

Н, тобто найменше можливе значення показника для прийнятого на цьому кроці порядку обходу вершин. Якщо на будь-якому кроці нижня межа перебільшить верхню, то подальший перебір варіантів припиняється та виконується аналіз альтернативних розв'язків. Якщо отримано допустимий розв'язок, то змінюється верхня межа та виконується аналіз альтернативних розв'язків.

Таблиця 9.2

Тривалість руху візка крана до контейнера та його переміщення до місця розташування на складі

Від	До				
	1	6 (2→6)	7 (3→7)	8 (4→8)	9 (5→9)
1	–	5,5	6,0	2,8	3,5
6	0	–	11,2	8,3	9,0
7	0	11,6	–	7,3	6,5
8	0	7,5	8,0	–	6,0
9	0	11,5	11,9	7,9	–

Складемо довільний план переміщення контейнерів, наприклад $\{(1,6);(6,7);(7,8);(8,9);(9,1)\}$. Тривалість повернення крана за контейнерами становитиме $5,5+11,2+7,3+6,0+0=30$ хв. Отриманий результат являє собою верхню межу $B=30$.

Виконати редукцію рядків та стовпчиків матриці. Для цього в кожному стовпчику визначити мінімальний елемент та відняти його від усіх елементів стовпчика (табл. 9.3). Після цього подібна операція виконується з рядками. Зазначимо, що в цій таблиці редукція рядків не виконується, оскільки кожний з рядків має нульовий елемент. Отримана після редукції матриця наведена в табл. 9.4.

Визначимо величину нижньої межі; для цього необхідно знайти суму мінімальних елементів, за допомогою яких виконувалася редукція матриці, для цього прикладу $H=5,5+6+2,8+3,5=17,8$ хв. Таким чином, тривалість вивантаження не може бути меншою за 17,8 хв. Хід рішення зручно відслідковувати на дереві розв'язку. Так, отримані верхня та нижня границі вказуються на дереві розв'язку біля відповідної вершини (рис. 9.2).

Додати в маршрут одне ребро. Найімовірніше до маршруту входитиме те ребро, виключення якого максимально збільшить тривалість вивантаження. Для визначення цього ребра необхідно розрахувати штрафи A_i, B_j: у кожному рядку знайти нульовий елемент та визначити йому альтернативу (тобто мінімальний елемент за винятком даного), ця процедура виконується і для стовпчиків матриці. Розраховані штрафи наведені в табл. 9.5.

Таблиця 9.3

Розрахункова матриця до редукції (ітерація 1)

	1	**6**	**7**	**8**	**9**
1	–	5,5	6,0	2,8	3,5
6	0	–	11,2	8,3	9,0
7	0	11,6	–	7,3	6,5
8	0	7,5	8,0	–	6,0
9	0	11,5	11,9	7,9	–
Q_j	0	5,5	6,0	2,8	3,5

Таблиця 9.4

Розрахункова матриця після редукції (ітерація 1)

	1	**6**	**7**	**8**	**9**	C_i
1	–	0	0	0	0	0
6	0	–	5,2	5,5	5,5	0
7	0	6,1	–	4,5	3,0	0
8	0	2,0	2,0	–	2,5	0
9	0	6,0	5,9	5,1	–	0
Q_j	0	5,5	6,0	2,8	3,5	17,8

Таблиця 9.5

Розрахунок штрафів (ітерація 1)

	1	**6**	**7**	**8**	**9**	C_i	A_i
1	–	0	0	0	0	0	0
6	0	–	5,2	5,5	5,5	0	5,2
7	0	6,1	–	4,5	3,0	0	3,0
8	0	2,0	2,0	–	2,5	0	2,0
9	0	6,0	5,9	5,1	–	0	5,1
Q_j	0	5,5	6,0	2,8	3,5	17,8	
B_j	0	2,0	2,0	4,5	2,5		

Додатковий пробіг, викликаний виключенням ребра *ij*, знаходимо за формулою: $\Phi_{ij} = A_i + B_j$, де A_i – альтернатива в рядку; B_j – альтернатива в стовпці. Для табл. 9.5 маємо:

$\Phi_{16} = 0 + 2 = 2;$ $\Phi_{17} = 0 + 2 = 2;$ $\Phi_{18} = 0 + 4,5 = 4,5;$ $\Phi_{19} = 0 + 2,5 = 2,5;$

$\Phi_{61} = 5,2 + 0 = 5,2;$ $\Phi_{71} = 3 + 0 = 3;$ $\Phi_{81} = 2 + 0 = 2;$ $\Phi_{91} = 5,1 + 0 = 5,1.$

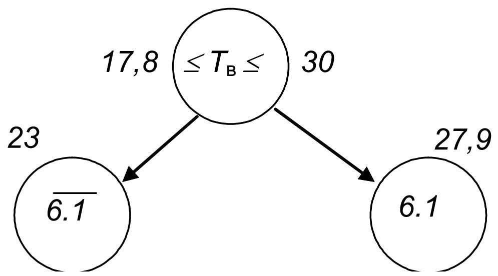


Рис. 9.2. Дерево розв’язку після виключення ребра (6,1)

Отже, максимальне збільшення тривалості (штраф) отримаємо при виключенні ребра (6,1) – $\Phi_{61} = 5,2$ хв. При виключенні ребра (6,1) нижня межа складе $17,8 + 5,2 = 23$ хв (рис. 9.2).

Щоб визначити нижню межу розв’язку, у який входить ребро (6,1), з матриці необхідно виключити відповідні рядок та стовбець, а також викреслити ребро, що спричинить зустрічний пробіг (1,6) (див. табл. 9.6–9.8).

Таблиця 9.6

Виключення ребра (1,6)

	1	**6**	**7**	**8**	**9**
1	–	–	0	0	0
6	0	–	5,2	5,5	5,5
7	0	6,1	–	4,5	3,0
8	0	2,0	2,0	–	2,5
9	0	6,0	5,9	5,1	–

Таблиця 9.7

Розрахункова матриця до редукції (ітерація 2)

	6	**7**	**8**	**9**	C_i
1	–	0	0	0	0
7	6,1	–	4,5	3,0	3,0
8	2,0	2,0	–	2,5	2,0
9	6,0	5,9	5,1	–	5,1

Таблиця 9.8

Розрахунок штрафів після редукції (ітерація 2)

	6	**7**	**8**	**9**	C_i	A_i
1	–	0	0	0	0	0
7	3,1	–	1,5	0	3,0	1,5
8	0	0	–	0,5	2,0	0
9	0,9	0,8	0	–	5,1	0,8
Q_j	0	0	0	0	10,1	
B_j	0,9	0	0	0		

Нижня межа розв'язку складає $17,8+3+2+5,1=17,8+10,1=27,9$ хв (див. рис. 9.2). Розрахуємо штрафи при виключенні ребер:

$\Phi_{19}=0+0=0;$ $\Phi_{17}=0+0=0;$ $\Phi_{18}=0+0=0;$ $\Phi_{79}=1,5+0=1,5.$

$\Phi_{86}=0,9+0=0,9;$ $\Phi_{87}=0+0=0;$ $\Phi_{98}=0,8+0=0,8;$

Максимальне збільшення тривалості отримаємо при виключенні ребра (7,9) – $\Phi_{79}=1,5$ хв; при цьому нижня межа складе $27,9+1,5=29,4$ (рис. 9.3).

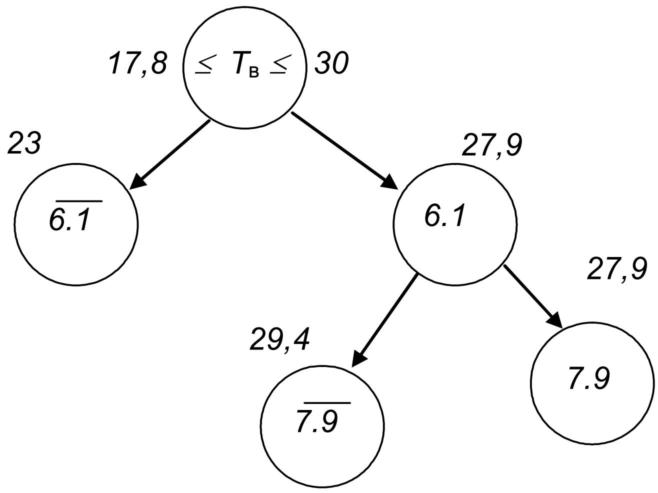


Рис. 9.3. Дерево розв'язку після виключення ребер (6,1) та (7,9)

Щоб визначити нижню межу розв'язку, у який входить ребро (7,9), з матриці необхідно виключити відповідний рядок та стовпець, а також ребро (9,7), що відповідає зустрічному пробігу (табл. 9.9).

Таблиця 9.9

Розрахунок штрафів після виключення ребра (7,9)
та редукції матриці (ітерація 3)

	6	**7**	**8**	C_i	A_i
1	–	0	0	0	0
8	0	0	–	0	0
9	0,9	–	0	0	0,9
Q_j	0	0	0	0	
B_j	0,9	0	0		

Нижня межа розв'язку складає $27{,}9+0=27{,}9$ хв (див. рис. 9.3). Розрахуємо штрафи при виключенні ребер:

$\Phi_{17}=0+0=0;$ $\Phi_{18}=0+0=0;$ $\Phi_{86}=0+0=0;$ $\Phi_{87}=0+0=0;$
$\Phi_{98}=0+0{,}9=0{,}9.$

Максимальне збільшення тривалості отримаємо при виключенні ребра (9,8) – $\Phi_{98}=0{,}9$ хв; при цьому нижня межа складе $27{,}9+0{,}9=28{,}8$ (рис. 9.4).

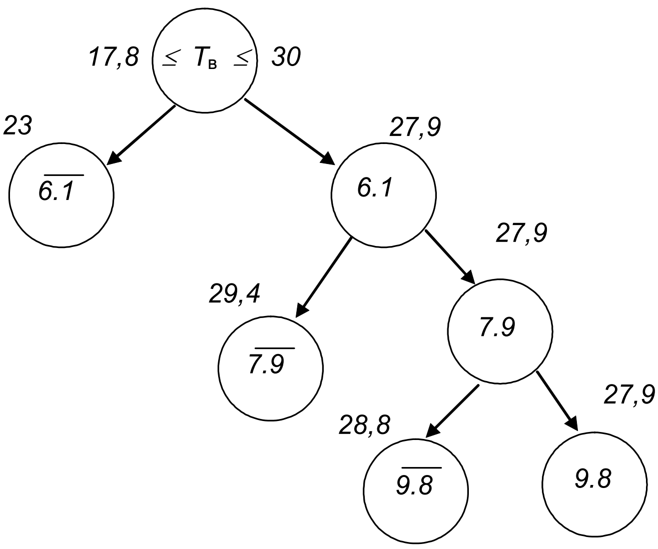


Рис. 9.4. Дерево розв'язку після виключення ребер (6,1), (7,9) та (9,8)

Викреслюємо з матриці (табл. 9.10) рядок 9 та стовпець 8, а також ребро (8,7), що відповідає зустрічному пробігу (тобто викреслено ребра (6,1); (7,9); (9,8), а також зустрічні пробіги на ребрах (1,6); (9,7); (8,9) та (8,7)).

Таблиця 9.10

Матриця після викреслення ребер (1,6); (9,7); (8,9); (8,7) (ітерація 4)

	6	**7**
1	–	0
8	0	–

В отриманій матриці виконувати редукцію немає сенсу, тому ребра (1,7) та (8,6) додаються до дерева розв'язку (рис. 9.5).

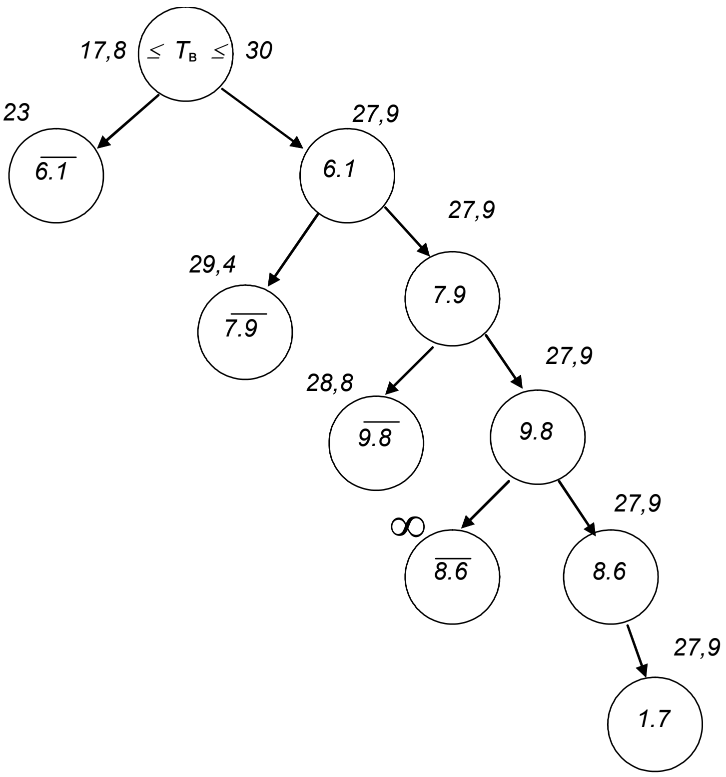


Рис. 9.5. Дерево розв'язку після виключення
ребер (6,1), (7,9), (9,8), (8,6) та (1,7)

У результаті отримано новий розв'язок 1–7–9–8–6–1. Тривалість вивантаження складає 27,9 хв (нова верхня межа).

При подальшому розв'язуванні необхідно розглянути лише напрямок («гілку») $\overline{6.1}$, бо нижні межі інших напрямків («гілок») вище нової верхньої межі 27,9 хв. Для цього у вихідній матриці (див. табл. 9.4) викреслюється ребро (6,1).

Далі виконуються необхідні редукції цієї матриці до тих пір, поки нова нижня межа не перевищить існуючу або не буде отримано новий розв'язок. Розв'язок наведено у табл. 9.11–9.13, а продовження дерева пошуку оптимального розв'язку по «гілці» $\overline{6.1}$ зображено на рис. 9.6.

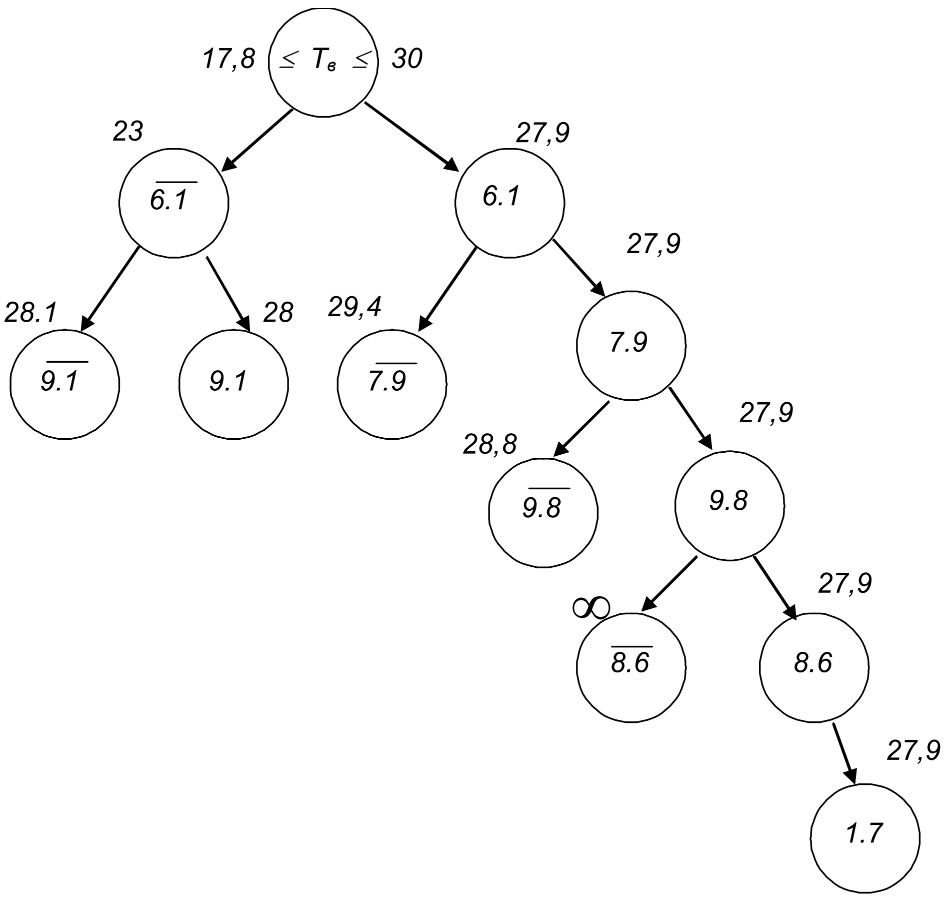


Рис. 9.6. Дерево пошуку розв'язку після виключення ребер (6,1), (7,9), (9,8), (8,6) та (1,7), а також продовження розв'язку по «гілці» $T_в - \overline{6.1}$

$\Phi_{16} = 0 + 2 = 2;$ $\quad\Phi_{17} = 0 + 0 = 0;$ $\quad\Phi_{18} = 0 + 0 = 0;$ $\quad\Phi_{19} = 0 + 0 = 0;$

$\Phi_{67} = 0 + 0 = 0;$ $\quad\Phi_{69} = 0 + 0 = 0;$ $\quad\Phi_{71} = 3 + 0 = 3;$ $\quad\Phi_{91} = 5{,}1 + 0 = 5{,}1.$

Отже, виключаємо ребро (9,1).

Нова нижня межа складає $23 + 5 = 28$ хв, що перевищує верхню межу розв'язку 27,9 хв (рис. 9.6). Таким чином, оптимальний порядок вивантаження контейнерів включає ребра (1,7), (8,6), (9,8), (7,9), (6,1), тобто оптимальним є такий маршрут: **1**–3–**7**–5–**9**–4–**8**–2–**6**–**1**; при цьому тривалість вивантаження складе 27,9 хв. Отриманий порядок вивантаження наведено на рис. 9.7.

Таблиця 9.11

Розрахунок штрафів (ітерація 5)

	1	**6**	**7**	**8**	**9**	C_i	A_i
1	–	0	0	0	0	0	0
6	–	–	0	0,3	0	5,2	0
7	0	6,1	–	4,5	3,0	0	3,0
8	0	2,0	2,0	–	2,5	0	2,0
9	0	6,0	5,9	5,1	–	0	5,1
Q_j	0	0	0	0	0	5,2	
B_j	0	2,0	0	0,3	0		

Таблиця 9.12

Матриця після виключення ребра (9,1)

	6	**7**	**8**	**9**	C_i
1	0	0	0	–	0
6	–	0	0,3	0	0
7	6,1	–	4,5	3,0	3,0
8	2,0	2,0	–	2,5	2,0

Таблиця 9.13

Матриця після виключення ребра (9,1) та редукції

	6	**7**	**8**	**9**	C_i
1	0	0	0	–	0
6	–	0	0,3	0	0
7	3,1	–	1,5	0	3,0
8	0	0	–	0,5	2,0
Q_j	0	0	0	0	5,0

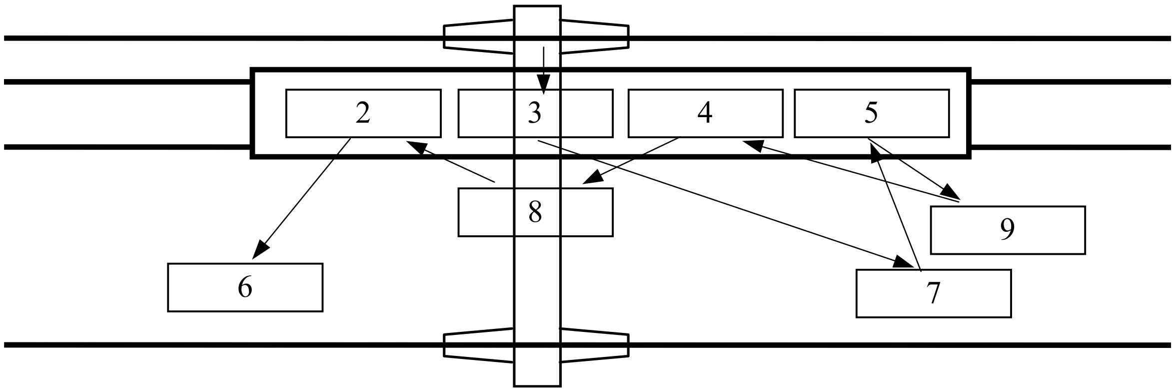


Рис. 9.7. Оптимальний порядок розвантаження контейнерів

Контрольні запитання та завдання

1. Пояснити суть задачі комівояжера. Наведіть приклади задачі комівояжера.
2. Сформулювати математичну постановку задачі комівояжера.
3. Сформулювати обмеження задачі комівояжера.
4. Які особливості задачі комівояжера порівняно з основною задачею лінійного програмування?
5. Скільки можливих розв’язків має задача комівояжера для транспортної мережі з n пунктів?
6. Пояснити загальну ідею методу «гілок та меж».
7. Що таке редукція матриці?
8. Як визначити верхню межу розв’язку при розв’язанні задачі комівояжера методом «гілок та меж»?
9. Як визначити нижню межу розв’язку при розв’язанні задачі комівояжера методом «гілок та меж»?
10. У якому випадку метод «гілок та меж» передбачає припинення пошуку розв’язку за «гілкою» та перехід до аналізу альтернативних розв’язків?
11. Розв’язати задачу про вивантаження контейнерів (див. п. 9.2.2) за вихідних даних, що наведені в табл. 9.14.
12. З оптового складу потрібно одним вантажним автомобілем розвезти товари до п’яти магазинів. Відстані між магазинами, а також між складом та магазинами задані у табл. 9.15. До кожного магазину автомобіль повинен заїхати тільки один раз, а після розвозу товарів повернутись на склад. Необхідно скласти найкоротший маршрут руху вантажного автомобіля.

Таблиця 9.14

Вихідні дані до задачі 11

Від	До							
	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1,7	0,3	0,2	1,0	–	–	–	–
2	–	–	–	–	5,0	–	–	–
3	–	–	–	–	–	4,0	–	–
4	–	–	–	–	–	–	2,6	–
5	–	–	–	–	–	–	–	3,0
6	–	7,2	5,7	6,0	–	–	–	–
7	4,3	–	4,4	5,2	–	–	–	–
8	2,5	2,0	–	3,5	–	–	–	–
9	6,5	5,9	5,6	–	–	–	–	–

Таблиця 9.15

Вихідні дані до задачі 12

Від	До					
	Склад	Магазин 1	Магазин 2	Магазин 3	Магазин 4	Магазин 5
Склад	–	7	2	6	8	11
Магазин 1	7	–	4	5	6	5
Магазин 2	2	4	–	6	8	2
Магазин 3	6	5	6	–	3	9
Магазин 4	8	6	8	3	–	10
Магазин 5	11	5	2	9	10	–

13. Ремонтна організація здійснює сервісне обслуговування обладнання в п’яти пунктах. Бригада повинна виїхати із сервісного центру та виконати обслуговування обладнання в будь-яких чотирьох пунктах з п’яти, після чого повернутись до сервісного центру. Тривалість виконання обслуговування у кожному

пункті (хв), а також тривалість переїзду бригади між пунктами (хв) задані у табл. 9.16. Знайти такий порядок виконання завдання бригадою, що забезпечує найменшу загальну тривалість її роботи (з урахуванням переїздів між пунктами).

Таблиця 9.16

Вихідні дані до задачі 13

Від	До					
	Центр	Пункт 1	Пункт 2	Пункт 3	Пункт 4	Пункт 5
	Тривалість обслуговування, хв					
	–	40	60	50	35	45
Центр	–	50	35	48	63	52
Пункт 1	50	–	42	55	36	47
Пункт 2	35	45	–	39	58	44
Пункт 3	48	53	41	–	50	36
Пункт 4	63	38	55	47	–	60
Пункт 5	52	50	42	38	62	–

14. Логістична компанія планує маршрут руху вантажного автомобіля, який має доставити певну продукцію від логістичного центру до п’яти різних міст, а потім повернутися до логістичного центру. Тривалість знаходження автомобіля в кожному місті під вивантаженням (год), а також тривалість руху між містами (год) задано в табл. 9.17. Необхідно запланувати маршрут руху автомобіля таким чином, щоб його загальна тривалість була мінімальною, а вантаж у пункт № 2 був доставлений не пізніше, ніж через 15 годин після виїзду автомобіля з логістичного центру.

Таблиця 9.17

Вихідні дані до задачі 14

Від	До					
	Центр	Місто 1	Місто 2	Місто 3	Місто 4	Місто 5
	Тривалість обслуговування, год					
	–	3	3,5	2,8	2,5	3,2
Центр	–	2,8	5,2	3,3	3,0	4,4
Місто 1	2,6	–	4,8	3,2	1,8	2,6
Місто 2	5,0	4,7	–	3,8	4,2	3,5
Місто 3	3,1	3,4	4,2	–	2,7	5,0
Місто 4	2,8	2,0	4,0	2,5	–	3,3
Місто 5	4,1	2,8	3,8	4,8	3,5	–

РОЗДІЛ 10

Динамічне програмування

10.1. Постановка задачі динамічного програмування

Динамічне програмування – це математичний метод оптимізації рішень, спрямований на отримання максимального ефекту від реалізації багатоетапних (багатокрокових) керованих процесів. Задачами динамічного програмування є задачі поетапного планування капітальних вкладень, заміни обладнання, вибору раціональних режимів руху транспортних одиниць на маршруті, знаходження найкоротших (найбільш раціональних) маршрутів на транспортній мережі тощо.

До характерних особливостей задач динамічного програмування можна віднести:

– неоднозначність результатів (багатоваріантність рішення);

– можливість поділу загального процесу на етапи;

– керованість процесу, тобто на кожному етапі є можливість прийняття рішення щодо розвитку процесу на даному етапі;

– адитивність критерію ефективності, який являє собою суму часткових критеріїв, отриманих на кожному з етапів.

Якщо кількість етапів, на які розбивається процес, та кількість можливих рішень на кожному етапі порівняно не великі, то задачу можна розв’язати простим перебором варіантів. Однак у більшості випадків такий шлях є неприйнятним через великий обсяг необхідних розрахунків. Використання методів динамічного програмування дозволяє здійснювати цілеспрямований відбір варіантів розв’язання задачі та за рахунок цього суттєво скоротити обсяг розрахунків.

Виконаємо математичну постановку задачі динамічного програмування [1–3, 7, 15–17].

Нехай є деяка операція (процес) *O*, розвиток якої в часі здійснюється дискретно за *m* кроків (етапів). Стан операції на кожному *i*-му кроці характеризується вектором параметрів

$$x(i) = \left\{ x_i^1, x_i^2, \ldots, x_i^n \right\};$$

стан виконання операції у початковий момент часу є заданим $x(i=0) = x_0$. Розвиток процесу *O* полягає в послідовному переході з одного стану в інший до досягнення кінцевого стану $x(i=m) = x_m$.

На кожному *i*-му кроці здійснюється вибір параметрів операції $\tilde{x}(i) = \left\{ \tilde{x}_i^1, \tilde{x}_i^2, \ldots, \tilde{x}_i^k \right\}$, $\tilde{x}(i) \in x(i)$ тобто приймається рішення щодо подальшого розвитку операції. Таке рішення U_i називають *управлінням на і-му кроці*. Залежно від прийнятого управління U_i на *i*-му кроці досягається певний ефект $w_i = f(U_i)$.

Управління операцією в цілому являє собою сукупність всіх покрокових управлінь, яку називають *стратегією управління*:

$$U = (U_1, U_2, \ldots, U_i, \ldots, U_m).$$

Ефект *W* від реалізації всього керованого процесу залежить від загальної стратегії управління і відповідно від управлінь U_i на кожному кроці:

$$W = f(U) = f(U_1, U_2, \ldots, U_i, \ldots, U_m).$$

Загальний ефект від реалізації процесу визначається як сума ефектів w_i, отриманих на кожному окремому кроці процесу:

$$W = w_1 + w_2 + \ldots + w_i + \ldots + w_m.$$

Необхідно із множини стратегій управління обрати таку $\tilde{U} = \left(\tilde{U}_1, \tilde{U}_2, \ldots, \tilde{U}_i, \ldots, \tilde{U}_m\right)$, яка забезпечує перехід операції *O* з початкового стану x_0 в кінцевий x_m таким чином, щоб загальний ефект *W* від реалізації операції був максимальним (або мінімальним): $W(\tilde{U}) \to \max(\min)$.

10.2. Розв'язання задачі динамічного програмування

Порядок розв'язання задачі динамічного програмування. Принцип оптимальності Белмана. Ідея методу динамічного програмування така [1, 2, 7, 15]. Операція розбивається на декілька m кроків. Складність розв'язання задачі з вибору оптимальної стратегії управління полягає в тому, що при прийнятті рішення (вибору управління) на кожному i-му кроці необхідно враховувати наслідки цього рішення U_i на всіх наступних кроках. Однак ця вимога справедлива для всіх кроків операції, окрім останнього m-го кроку. Рішення U_m на останньому кроці приймається таким чином, щоб на цьому кроці досягти максимального ефекту: $w_m = f\left(U_m\right) \to \max$.

У цьому зв'язку розв'язання задачі динамічного програмування розпочинається від кінцевого стану до початкового (від останнього кроку до першого). На кожному i-му кроці здійснюється пошук таких умовно-оптимальних рішень U_i^*, які забезпечують оптимальне продовження процесу відносно стану, який досягнуто на цьому i-му кроці; при цьому, яким чином було досягнуто цього стану на попередніх (i–1)-х кроках до уваги не береться. Такий принцип вибору умовно-оптимальних рішень (управлінь) відомий як *принцип оптимальності Р. Белмана*.

На другому етапі, рухаючись уже у зворотному напрямку – від початкового стану до кінцевого, з врахуванням умовно-оптимальних рішень U_i^* на кожному кроці процесу визначається набір безумовно-оптимальних рішень (оптимальна стратегія управління) $\tilde{U} = \left(\tilde{U}_1, \tilde{U}_2, \ldots, \tilde{U}_i, \ldots, \tilde{U}_m\right)$, які забезпечують досягнення максимального ефекту від реалізації процесу.

Умова задачі. На рис. 10.1 зображена транспортна мережа, на якій задано відстані між окремими пунктами. Необхідно знайти найкоротший маршрут від пункту S до пункту F.

Розв'язання. Розв'яжемо задачу з використанням методу динамічного програмування. Для цього розіб'ємо розв'язок на кроки, кількість яких відповідає кількості пунктів. На кожному кроці для відповідного пункту визначається умовно-оптимальне рішення, тобто найкоротший маршрут від даного пункту до кінцевого пункту *F*. Пошук умовно-оптимальних рішень здійснюється від кінцевого пункту *F* до початкового пункту *S*.

Знайдемо умовно-оптимальне рішення для пункту *Д*. Оскільки від цього пункту є тільки один шлях до кінцевого пункту *F* довжиною 2 км, то для пункту *Д* умовно-оптимальне рішення (маршрут) становить 2 км. Аналогічно для пункту *Е* умовно-оптимальне рішення складає 5 км. Довжини цих маршрутів вказуються у відповідних вершинах транспортної мережі (рис. 10.2), а умовно-оптимальні маршрути відмічаються стрілками.

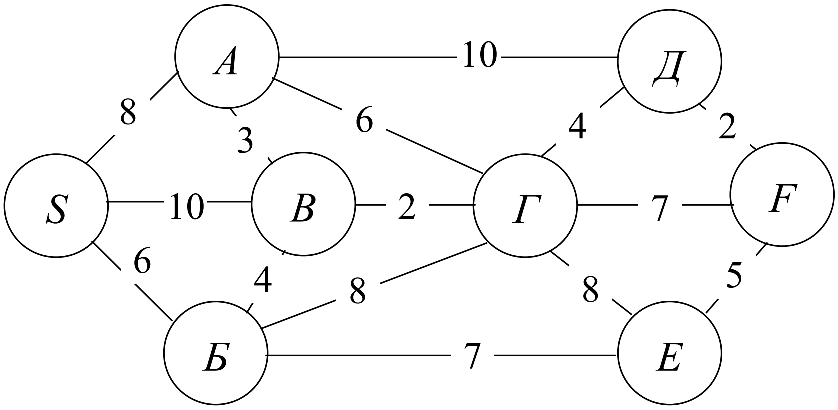


Рис. 10.1. Транспортна мережа

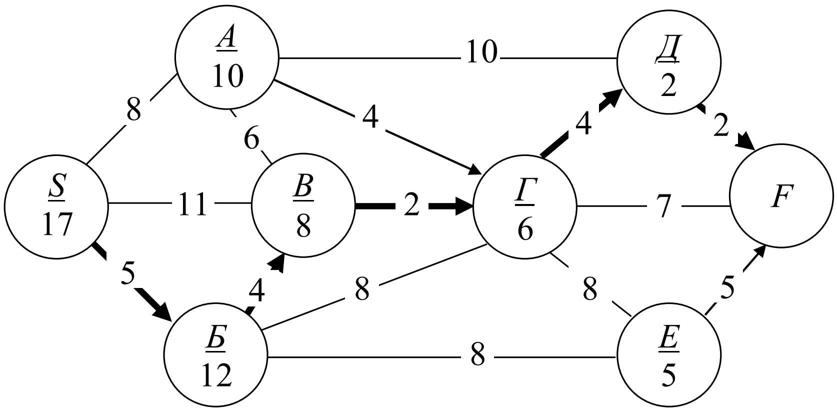


Рис. 10.2. Знаходження найкоротшого маршруту

Для пункту *Г* можливі три напрямки руху: до пунктів *Д*, *Е* та *F*. Припустимо, що від пункту *Г* будемо рухатися до пункту *Д*, тоді загальна довжина маршруту до пункту *F* складе $4+2=6$ км (довжина ділянки *Г–Д* та довжина умовно-оптимального маршруту для пункту *Д*, знайденого на попередньому кроці). Умовно-оптимальний маршрут для пункту *Г* знайдемо по мінімальному значенню серед трьох можливих маршрутів руху: $\min\{(4+2);(8+5);(7)\}=6$ км. Таким чином, від пункту *Г* необхідно рухатися до пункту *Д*, при цьому довжина маршруту до пункту *F* буде найменшою та складатиме 6 км. Умовно-оптимальне рішення (маршрут) для пункту *Г* відмічається на рис. 10.2.

Дотримуючись послідовності *Г–В–Б–А–S*, аналогічно знаходять умовно-оптимальні маршрути для всіх інших пунктів (див. рис. 10.2). Далі, з урахуванням умовно-оптимальних рішень, рухаючись (по стрілках) від початкового пункту *S* до кінцевого пункту *F*, знаходимо оптимальний (найкоротший) маршрут *S–Б–В–Г–Д–F* (виділений на рис. 10.2) довжиною 17 км.

Умова задачі. Вантажний поїзд рухається по перегону, що поділений на 4 ділянки. Початкова V_0 та кінцева V_4 швидкості руху поїзда дорівнюють нулю. Можливі швидкості руху поїзда на границях ділянок наведено в табл. 10.1. Витрати, пов'язані з рухом поїзда по ділянці, залежать від його початкової та кінцевої швидкості на границях ділянки і задані матрицею вартостей (табл. 10.1). Необхідно визначити такий режим ведення поїзда, щоб загальні витрати, пов'язані з його рухом по перегону, були мінімальними.

Розв'язання. Побудуємо граф можливих стратегій руху поїзда по перегону (рис. 10.3).

I етап. Припустимо, що перед останнім кроком на початку ділянки 4 (див. рис. 10.3) швидкість поїзда становить $V_{31} = 75$ км/год. Для переходу в кінцевий стан $(V_4 = 0)$ можливий тільки один режим руху поїзда, і він же є оптимальним для цього стану $(V_{31} = 75)$; витрати на перехід від стану $V_{31} = 75$ до $V_4 = 0$ складають 70 одиниць (див. табл. 10.1). Аналогічно визначаються умовно-оптимальні стратегії для станів $V_{32} = 65$ та $V_{33} = 55$; витрати при цьому складуть відповідно 60 та 50 одиниць. Отримані значення витрат (70, 60 та 50 одиниць) для умовно-оптимальних стратегій руху поїзда по ділянці 4 наведені на рис. 10.3, а відповідні умовно-оптимальні стратегії виділені на графі суцільними лініями.

Припустимо, що на початку ділянки 3 швидкість поїзда дорівнює $V_{21} = 65$ км/год. При цьому можливі три режими руху поїзда: $V_{21} = 65 \to V_{31} = 75$, $V_{21} = 65 \to V_{32} = 65$ та $V_{21} = 65 \to V_{33} = 55$. При реалізації кожного з цих режимів будуть різні витрати ресурсів на ділянці 3: 70, 50 та 30 одиниць відповідно. Сумарні витрати на ділянках 3 та 4 складають: $70 + 70 = 140$ одиниць (стратегія $V_{21} \to V_{31} \to V_4)$; $50 + 60 = 110$ одиниць (стратегія $V_{21} \to V_{32} \to V_4)$; $30 + 50 = 80$ одиниць (стратегія $V_{21} \to V_{33} \to V_4)$.

Мінімальне значення витрат (80 одиниць) визначає умовно-оптимальну стратегію $(V_{21} \to V_{33} \to V_4)$ для стану $V_{21} = 65$ км/год на початку ділянки 3; вказана стратегія виділена на графі суцільної лінією (див. рис 10.3). Аналогічно визначаються умовно-оптимальні стратегії для станів $V_{22} = 55$ та $V_{23} = 45$; мінімальні витрати при цьому складуть відповідно 90 та 110 одиниць.

Таблиця 10.1

Вихідні дані до задачі про вибір режиму руху поїзда

Швидкості на ділянці 1, км/год				Швидкості на ділянці 2, км/год				Швидкості на ділянці 3, км/год				Швидкості на ділянці 4, км/год	
$V_{поч}$	V_{11}	V_{12}	V_{13}	$V_{поч}$	V_{21}	V_{22}	V_{23}	$V_{поч}$	V_{31}	V_{32}	V_{33}	$V_{поч}$	V_4
	70	**60**	**50**		**65**	**55**	**45**		**75**	**65**	**55**		**0**
$V_0 = \mathbf{0}$	120	110	90	$V_{11} = \mathbf{70}$	90	70	60	$V_{21} = \mathbf{65}$	70	50	30	$V_{31} = \mathbf{75}$	70
				$V_{12} = \mathbf{60}$	110	90	60	$V_{22} = \mathbf{55}$	80	60	40	$V_{32} = \mathbf{65}$	60
				$V_{13} = \mathbf{60}$	110	90	80	$V_{23} = \mathbf{45}$	90	70	60	$V_{33} = \mathbf{55}$	50

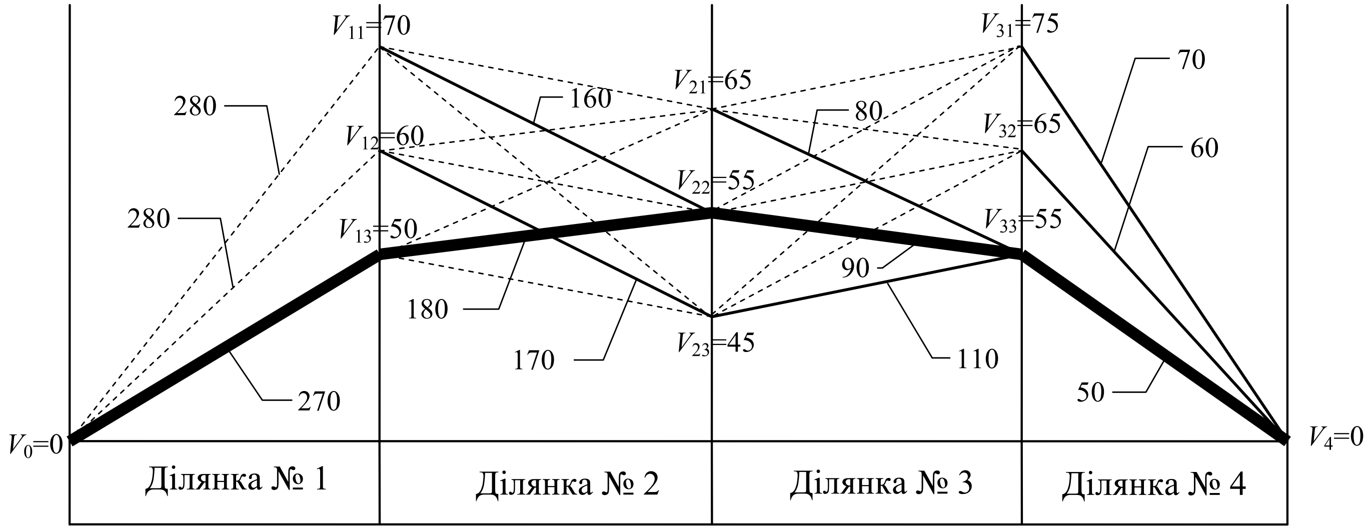


Рис. 10.3. Граф можливих стратегій руху поїзда

Для ділянки 2 та стану $V_{11} = 70$ км/год маємо три можливі стратегії: $V_{11} = 70 \to V_{21} = 65$, $V_{11} = 70 \to V_{22} = 55$ та $V_{11} = 70 \to V_{23} = 45$. При стратегії $V_{11} \to V_{21}$ витрати на ділянці 2 складають 90 одиниць, а для стану $V_{21} = 65$ км/год умовно-оптимальна стратегія $\left(V_{21} \to V_{33} \to V_4\right)$, яка забезпечує мінімум витрат (80 одиниць), уже визначена на попередньому кроці. Отже, загальні витрати по стратегії $V_{11} \to V_{21}$ складуть $90 + 80 = 170$ одиниць. При виборі стратегій $V_{11} \to V_{22}$ або $V_{11} \to V_{23}$ витрати складуть відповідно $70 + 90 = 160$ та $60 + 110 = 170$ одиниць.

Отже, умовно-оптимальною стратегією для стану $V_{11} = 70$ км/год, яка забезпечує мінімум загальних витрат (160 одиниць), є $V_{21} \to V_{22} \to V_{33} \to V_4$. Аналогічно визначаємо умовно-оптимальні стратегії для станів $V_{12} = 60$ та $V_{13} = 50$; мінімальні витрати для них складуть відповідно 170 та 180 одиниць.

Таким чином проходимо зворотним ходом до початкового стану $\left(V_0 = 0\right)$, для якого також визначаємо умовно-оптимальну стратегію. Усі умовно-оптимальні стратегії позначаються на графі суцільними лініями (див. рис. 10.3).

Цю задачу зручно розв'язувати в табличному вигляді (табл. 10.2). При цьому, в чисельнику вказуються витрати, пов'язані з рухом поїзда тільки на даній ділянці, а в знаменнику – загальні витрати до кінця перегону. Серед загальних витрат по рядку обирається найменше значення (виділені значення в табл. 10.2), а відповідний йому режим є умовно-оптимальним для даного стану.

II етап. Рухаючись від початку першої ділянки $\left(V_0 = 0\right)$ до кінця перегону $\left(V_4 = 0\right)$ за умовно-оптимальними стратегіями, визначається безумовно-оптимальна стратегія руху поїзда, що забезпечує мінімальні витрати ресурсів. Наприклад, для першої ділянки умовно-оптимальною стратегією є режим $V_0 = 0 \to V_{13} = 50$ (див. табл. 10.2). Відповідно на початку ділянки 2 поїзд має рухатися зі швидкістю $V_{13} = 50$ км/год, а для стану $V_{13} = 50$ умовно-оптимальною стратегією є $V_{13} = 50 \to V_{22} = 55$; аналогічно визначаємо оптимальні режими руху поїзда для всіх інших ділянок. Відповідні цим режимам значення загальних витрат обведені в табл. 10.2.

Таким чином, отримана оптимальна стратегія руху поїзда по перегону: $V_0 = 0 \to V_{13} = 50 \to V_{22} = 55 \to V_{33} = 55 \to V_4 = 0$ (виділена на рис. 10.3); при цьому загальні витрати ресурсів, пов'язаних з рухом поїзда, є мінімальними й становлять 270 одиниць.

Методи динамічного програмування широко застосовуються при розв'язанні задач, пов'язаних з поетапним розподілом ресурсів.

Умова задачі. У залізничному вузлі для виконання маневрової роботи на чотирьох станціях виділяється 12 маневрових локомотивів. Витрати, пов'язані з простоєм вагонів та експлуатацією локомотивів, залежать від кількості локомотивів, що працюють на станції, та наведені в табл. 10.3.

Таблиця 10.2

Розв'язання задачі про вибір режиму руху поїзда

Ділянка 1				Ділянка 2				Ділянка 3				Ділянка 4	
$V_{поч}$	V_{11}	V_{12}	V_{13}	$V_{поч}$	V_{21}	V_{22}	V_{23}	$V_{поч}$	V_{31}	V_{32}	V_{33}	$V_{поч}$	V_4
	70	**60**	**50**		**65**	**55**	**45**		**75**	**65**	**55**		**0**
$V_0 = \mathbf{0}$	$\frac{120}{280}$	$\frac{110}{280}$	$\frac{90}{\boxed{270}}$	$V_{11} = \mathbf{70}$	$\frac{90}{170}$	$\frac{70}{160}$	$\frac{60}{170}$	$V_{21} = \mathbf{65}$	$\frac{70}{140}$	$\frac{50}{110}$	$\frac{30}{80}$	$V_{31} = \mathbf{75}$	$\frac{70}{70}$
				$V_{12} = \mathbf{60}$	$\frac{110}{190}$	$\frac{90}{180}$	$\frac{60}{170}$	$V_{22} = \mathbf{55}$	$\frac{80}{150}$	$\frac{60}{120}$	$\frac{40}{\boxed{90}}$	$V_{32} = \mathbf{65}$	$\frac{60}{60}$
				$V_{13} = \mathbf{50}$	$\frac{110}{190}$	$\frac{90}{\boxed{180}}$	$\frac{80}{190}$	$V_{23} = \mathbf{45}$	$\frac{90}{160}$	$\frac{70}{130}$	$\frac{60}{110}$	$V_{33} = \mathbf{55}$	$\frac{50}{\boxed{50}}$

Необхідно розподілити локомотиви по станціях вузла таким чином, щоб загальні витрати та маневрову роботу та простій вагонів були мінімальними.

Таблиця 10.3

Витрати, пов'язані з простоєм вагонів та експлуатацією локомотивів

Локомотиви	Витрати, грн/добу			
	Станція 1	Станція 2	Станція 3	Станція 4
0	∞	∞	∞	∞
1	830	∞	670	∞
2	620	1 100	530	860
3	460	720	420	720
4	550	620	500	500
5	670	550	600	420
6	800	510	730	550
7	∞	570	∞	700
8	∞	700	∞	∞
9	∞	∞	∞	∞

Розв'язання. Знаходження оптимального рішення розіб'ємо на 4 кроки (за кількістю станцій). При цьому на кожному кроці (для кожної станції) знаходяться умовно-оптимальні рішення $f_{N(y)}$ за рекурентною формулою:

$$f_{N(y)} = \min\left[g_N\left(x_N\right) + f_{N-1}\left(y - x_N\right)\right],$$

де N – загальна кількість станцій, що розглядається на відповідному кроці розв'язання задачі;

y – загальна кількість локомотивів, що загалом виділяється для N станцій на цьому кроці;

$x_N\left(y\right)$ – кількість локомотивів, яка виділяється станції з номером N;

$g_N\left(x_N\right)$ – витрати, пов'язані з простоєм вагонів та експлуатацією $x_{N(y)}$ локомотивів на станції з номером N (див. табл. 10.3);

$f_N\left(x_N\right)$ – умовно-оптимальні витрати, пов'язані з простоєм вагонів та експлуатацією $x_{N(y)}$ локомотивів на станції з номером N з врахуванням витрат на усіх попередніх кроках (станціях).

Важливо зазначити, що при розв'язанні задачі необхідно дотримуватись обмеження $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = y$, тобто для кожного умовно-оптимального рішення загальна кількість локомотивів, розподілених по станціях, повинна дорівнювати їх залишковій кількості для цього рішення.

І етап. Розв'язання задачі доцільно вести у табличному вигляді (табл. 10.4). Внаслідок того, що на першому кроці $f_{N-1} = 0$, то $f_1\left(x_1\right) = g_1\left(x_1\right)$, тобто на першому кроці (одна станція у вузлі) умовно-оптимальні витрати $f_1\left(x_1\right)$ для різної кількості локомотивів y збігаються з відповідними значеннями витрат $g_1\left(x_1\right)$. Таким чином, у табл. 10.4 стовпець $f_1\left(y\right)$ заповнюється відповідними значеннями $g_1\left(x_1\right)$ з табл. 10.3, а стовпець $x_1\left(y\right)$ заповнюється відповідними значеннями кількості локомотивів y.

Таблиця 10.4

Розрахунок витрат, пов'язаних з простоєм вагонів та експлуатацією локомотивів

y	$N=1$		$N=2$		$N=3$		$N=4$	
	$f_1(y)$, грн	$x_1(y)$	$f_2(y)$, грн	$x_2(y)$	$f_3(y)$, грн	$x_3(y)$	$f_4(y)$, грн	$x_4(y)$
1	830	1	∞	–	∞	–	∞	–
2	620	2	∞	–	∞	–	∞	–
3	**460**	**3**	1 930	2	∞	–	∞	–
4	550	4	1 550	3	2 600	1	∞	–
5	670	5	1 340	3	2 220	1	∞	–
6	800	6	**1 180**	**3**	2 010	1	–	–
7	∞	–	1 080	4	1 850	1	–	–
8	∞	–	1 010	5	**1 710**	**2**	–	–
9	∞	–	970	6	1 600	3	–	–
10	∞	–	1 030	7	1 500	3	–	–
11	∞	–	1 120	7	1 430	3	–	–
12	∞	–	1 240	7	1 390	3	**2 210**	**4**

На другому кроці розглядається залізничний вузол з двох станцій. При пошуку умовно-оптимальних рішень на цьому кроці слід врахувати, що на першій станції може експлуатуватись мінімум один локомотив, а на другій – мінімум два локомотиви (див. табл. 10.3). Отже, пошук умовно-оптимальних рішень необхідно починати для умови $y_2 = 3$. Розглянемо порядок розрахунку умовно-оптимальних витрат на другому кроці при експлуатації трьох та чотирьох локомотивів у залізничному вузлі, що складається з двох станцій.

$$f_2(y_2 = 3) = \min\left[x_2 = 2,\ y_1 = 1 \to 1100 + 830 = 1\,930\right] = 1\,930 \text{ грн},\ x_2(y) = 2;$$

$$f_2(y_2 = 4) = \min\begin{bmatrix} x_2 = 2,\ y_1 = 2 \to 1100 + 620 = 1\,730 \\ x_2 = 3,\ y_1 = 1 \to 720 + 830 = 1\,550 \end{bmatrix} = 1\,550 \text{ грн},\ x_2(y) = 3.$$

Аналогічно виконуються розрахунки умовно-оптимальних витрат для усіх інших значень y_2. Таким же чином здійснюється пошук умовно-оптимальних рішень на третьому кроці (три станції у вузлі); при цьому розрахунки починаються для умови $y_3 = 4$ (перша станція – мінімум один локомотив, друга – два, третя – один).

Для пояснення порядку заповнення табл. 10.4 розглянемо приклад визначення умовно-оптимального рішення на кроці 3 (три станції у вузлі), коли кількість нерозподілених локомотивів для трьох станцій становить $y_4 = 8$, тобто на четверту станцію було спрямовано $12 - 8 = 4$ локомотиви; при цьому вважаємо, що умовно-оптимальні рішення на попередніх кроках вже знайдено. Розрахунки зручно виконати у допоміжній табл. 10.5.

Таблиця 10.5

Приклад пошуку умовно-оптимального рішення

$x_3(y_3 = 8)$	$y_2 = y_3 - x_3$	$g_3(x_3)$, грн	$f_2(y_2)$, грн	$g_3(x_3) + f_2(y)$, грн
8	0	∞	∞	∞
7	1	∞	∞	∞
6	2	730	∞	∞
5	3	600	1 930	2 530
4	4	500	1 550	2 050
3	5	420	1 340	1 760
2	6	530	1 180	**1 710**
1	7	670	1 080	1 750
0	8	∞	1 010	∞

У першому стовпчику табл. 10.5 перераховані можливі значення кількості локомотивів x_3, що спрямовуються на третю станцію за умови виділення для трьох станцій вузла восьми локомотивів $(y_3 = 8)$. У другому стовпчику вказується залишок локомотивів для першої та другої станцій вузла у випадку, якщо для третьої станції буде виділено x_3 локомотивів. У третьому стовпчику – витрати $g_3(x_3)$, пов'язані з простоєм вагонів та експлуатацією x_3 локомотивів на третій станції (див. табл. 10.3). У четвертий стовпчик записуються відповідні значення умовно-оптимальних витрат $f_2(y_2)$, отримані на попередньому (другому) кроці (див. табл. 10.4), а у останній стовпчик – сума витрат на третій станції $g_3(x_3)$ та умовно-оптимальних витрат $f_2(y_2)$, отриманих на другому кроці. Серед значень останнього стовпчика обирається мінімальне; це значення умовно-оптимальних витрат $f_3(y_3=8)=1\,710$ грн та відповідна йому кількість локомотивів $x_3=2$ заносяться у табл. 10.4.

На останньому кроці (чотири станції у вузлі) пошук умовно-оптимального рішення виконується тільки для умови $y_4=12$, оскільки усі виділені маневрові локомотиви повинні бути розподілені на чотири станції.

II етап. Пошук безумовно-оптимального розподілення локомотивів починається з останньої (четвертої) станції. Мінімальні витрати складають 2 210 грн та відповідають 12 локомотивам у вузлі, 4 з яких направляються на четверту станцію, а на інші станції залишається $12-4=8$ локомотивів. Для 8 локомотивів умовно-оптимальні витрати складають 1 710 грн при роботі на третій станції 2 локомотивів (див. табл. 10.4), відповідно для першої та другої станцій залишається $8-2=6$ локомотивів. Оптимальний розподіл 6 локомотивів по двох станціях досягається в тому випадку, якщо на другій станції працюють 3 локомотиви, а на першій $6-3=3$ локомотиви (див. табл. 10.4).

Таким чином, на першу станцію необхідно спрямувати 3 локомотиви, на другу – 3 локомотиви, на третю – 2 локомотиви, на четверту – 4 локомотиви; при цьому загальні експлуатаційні витрати будуть мінімальними та складатимуть 2 210 грн.

Контрольні запитання та завдання

1. Дати визначення поняття «динамічне програмування».
2. Навести приклади задач динамічного програмування.
3. Які основні особливості задач динамічного програмування?
4. У яких випадках доцільно застосовувати методи динамічного програмування?
5. Сформулювати задачу динамічного програмування.
6. Що розуміють під «управлінням» та «стратегією управління» в теорії динамічного програмування?
7. Яка основна ідея методу динамічного програмування?
8. Сформулювати основні особливості алгоритму розв'язання задачі динамічного програмування.

9. Пояснити принцип оптимальності Белмана.
10. Що таке «умовно-оптимальне рішення» та «безумовно-оптимальне рішення» в задачах динамічного програмування?
11. Яким чином визначають умовно-оптимальне рішення для кожного стану задачі динамічного програмування? Навести приклад.
12. Як визначають безумовно-оптимальне рішення задачі динамічного програмування?
13. Методом динамічного програмування для транспортної мережі, яка зображена на рис. 10.4, знайти найкоротший маршрут з пункту *S* у пункт *F*.

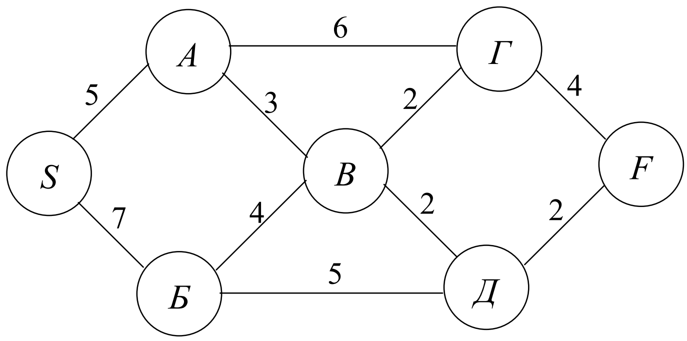


Рис. 10.4. Транспортна мережа до задачі 13

14. Методом динамічного програмування для транспортної мережі, яка зображена на рис. 10.5, знайти найкоротший маршрут з пункту *S* у пункт *F*.

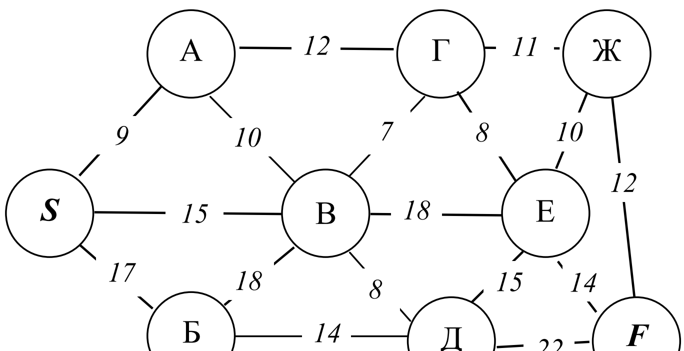


Рис. 10.5. Транспортна мережа до задачі 14

15. Розв'язати задачу про вибір режиму руху вантажного поїзда для вихідних даних, що задані у табл. 10.6.

Таблиця 10.6

Вихідні дані до задачі 15

Швидкості на ділянці 1, км/год				Швидкості на ділянці 2, км/год				Швидкості на ділянці 3, км/год				Швидкості на ділянці 4, км/год	
$V_{поч}$	V_{11}	V_{12}	V_{13}	$V_{поч}$	V_{21}	V_{22}	V_{23}	$V_{поч}$	V_{31}	V_{32}	V_{33}	$V_{поч}$	V_4
	70	**70**	**60**		**60**	**50**	**40**		**65**	**55**	**45**		**0**
$V_0 = \mathbf{0}$	125	105	100	$V_{11} = \mathbf{80}$	60	65	50	$V_{21} = \mathbf{60}$	65	50	50	$V_{31} = \mathbf{65}$	45
				$V_{12} = \mathbf{70}$	40	50	55	$V_{22} = \mathbf{50}$	70	60	55	$V_{32} = \mathbf{55}$	55
				$V_{13} = \mathbf{60}$	30	40	45	$V_{23} = \mathbf{40}$	75	60	65	$V_{33} = \mathbf{45}$	50

16. Розв’язати задачу про розподіл 12 маневрових локомотивів між станціями вузла для вихідних даних, що задані у табл. 10.7.

Таблиця 10.7

Вихідні дані до задачі 16

Локомотиви	Витрати, грн/добу			
	Станція 1	Станція 2	Станція 3	Станція 4
0	∞	∞	∞	∞
1	1 245	1 590	1 152	∞
2	964	1 291	895	∞
3	787	1 092	738	696
4	714	993	681	647
5	745	994	724	706
6	880	1 095	867	873
7	1 119	∞	∞	985
8	∞	∞	∞	∞

17. Транспортна компанія, яка включає п’ять автотранспортних підприємств, планує оновлення рухомого складу. Для цього виділяються кошти в розмірі 100 млн грн. Залежно від виділених коштів кожне з підприємств може отримати певний прибуток; відповідні значення наведені у табл. 10.8 (для спрощення припустимо, що кошти вкладаються у обсягах, кратних 10 млн грн). Необхідно таким чином розподілити виділені кошти між підприємствами, щоб загальний прибуток був максимальний.
18. На складі зберігається шість типів вантажів. Маса одного місця кожного типу вантажу та його вартість задані у табл. 10.9. У автомобіль вантажопідйомністю 35 т необхідно завантажити не більше як по одному місцю кожного типу вантажу, щоб при цьому загальна вартість вантажів у автомобілі була максимальною.

Таблиця 10.8

Вихідні дані до задачі 17

Кошти, млн грн	Прибуток підприємств, млн грн				
	1	2	3	4	5
10	1,0	0,2	1,2	0,6	2,0
20	2,0	1,0	2,2	1,2	2,4
30	2,8	2,4	2,4	2,6	2,6
40	4,0	3,6	2,8	2,8	2,8
50	5,0	5,0	3,2	3,6	3,0
60	5,6	5,8	3,4	4,0	3,0
70	6,0	7,0	3,6	4,0	3,0
80	6,0	7,0	3,6	4,0	3,0

Таблиця 10.9

Вихідні дані до задачі 18

Тип вантажу	1	2	3	4	5	6
Маса, т	4	7	11	12	16	20
Вартість, тис. грн	7	10	15	20	27	34

РОЗДІЛ 11

Сітьове планування та управління

11.1. Поняття сітьового планування

Розв'язуючи практичні задачі на виробництві, досить часто доводиться зустрічатись із задачею раціонального планування складних технологічних процесів. Прикладами таких задач на транспорті можуть бути:

– планування комплексу робіт зі спорудження чи ремонту об'єктів транспортної інфраструктури (залізнична колія, автомобільна дорога, логістичний центр, вантажний пункт, портовий причал тощо);

– розробка технологічних процесів роботи транспортних об'єктів (станції, вантажні пункти, порти) з обслуговування транспортних одиниць (поїзди, вагони, автомобілі, судна);

– розробка документообігу при оформленні та супроводженні перевезень;

– виконання комплексних науково-дослідних робіт для транспортних об'єктів.

Характерною особливістю кожного такого технологічного процесу є те, що він складається з комплексу окремих елементарних робіт, які виконуються не просто незалежно одна від одної, а взаємно зумовлюють одна одну так, що виконання деяких робіт не може бути розпочато раніше, ніж завершені інші роботи, але водночас частина робіт комплексу може виконуватись паралельно. При плануванні складних виробничих технологічних процесів необхідно на основі даних про тривалість, ресурсоємність та вартість окремих робіт отримати оцінку цих показників для усього процесу. Окрім того, план виконання комплексу робіт повинен давати чіткі відповіді на питання: коли починати та коли закінчувати окремі роботи, які роботи є «вузьким» місцем процесу та потребують особливого контролю, як раціонально розподілити наявні ресурси між окремими роботами тощо.

Безумовно, коли кількість робіт комплексу порівняно невелика, план їх виконання можна скласти на основі досвіду та здорового глузду. Однак, у випадку планування складних технологічних процесів без використання сучасних математичних методів, у т. ч. методів дослідження операцій, ефективного результату досягти неможливо. Одним з ефективних методів організації та аналізу складних технологічних комплексів взаємопов'язаних робіт є сітьове планування та управління (СПУ) [1, 2, 5, 7, 17, 18].

Метод сітьового планування дозволяє розв'язувати як пряму, так і обернену задачі дослідження операцій, тобто в одному випадку за допомогою СПУ можна спрогнозувати кінцевий результат при певній організації технологічного процесу (операції), в іншому – визначити таку схему організації технологічного процесу, щоб отримати необхідний результат. Серед особливостей методів СПУ – можливість у наочній графічній формі зобразити виробничий процес, завдяки чому чітко показати послідовність та логічний взаємозв'язок окремих робіт, виявити «вузькі» місця, що потребують особливого контролю.

За допомогою методів сітьового планування та управління розв'язують дві основні задачі:

– науковий аналіз та розробка технологічних процесів;
– оперативний контроль за виконанням технологічного процесу.

На етапі розробки технологічних процесів визначають таку послідовність виконання робіт та розподіл між ними наявних ресурсів, які забезпечують виконання всього технологічного процесу в мінімальні строки та/або з мінімальними витратами. Слід зазначити, що застосування методів СПУ не призводить, власне, до отримання оптимального рішення, як, наприклад, під час розв'язання оптимізаційних задач методами лінійного програмування. СПУ – це лише інструмент для розробки та аналізу можливих варіантів організації складних виробничих процесів, пошук же найбільш ефективних рішень здійснюється іншими відповідними методами оптимізації. На етапі контролю аналізується дотримання термінів виконання окремих операцій та оперативно корегується план виконання робіт залежно від фактичних умов.

11.2. Основні визначення

В основі методів СПУ лежить сітьовий графік – модель виробничого процесу у вигляді мережі, тобто фігури, яка складається з вершин і ребер (рис. 11.1). Основними елементами сітьового графіка є *робота*, *подія*, *шлях*.

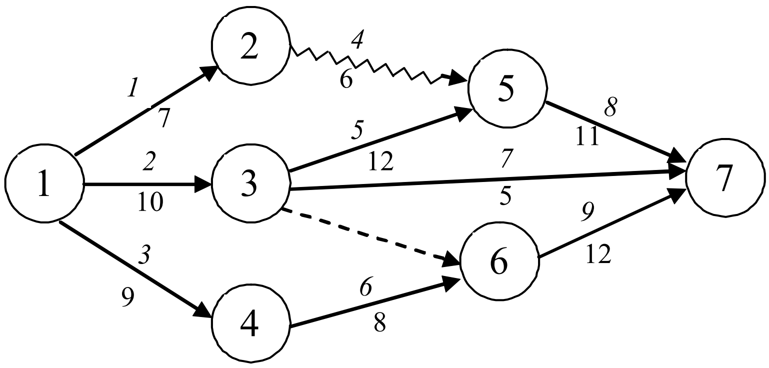


Рис. 11.1. Приклад сітьового графіку

Ребрам сітьового графіка відповідають роботи. **Робота** – це самостійна технологічна операція, яку можна розглядати ізольовано від інших. На сітьовому графіку роботи позначають стрілками (див. рис. 11.1); біля кожної стрілки вказується (зверху) номер роботи та (знизу) тривалість її виконання (в деяких випадках роботи позначаються номерами вершин, що їх обмежують). Розрізняють такі види робіт:

– *дійсна робота* – технологічна операція, виконання якої потребує витрат і часу, і ресурсів (наприклад, завантаження автомобіля, технічний огляд состава, складання перевізних документів тощо); на сітьовому графіку позначається суцільною стрілкою (наприклад, робота *1* на рис. 11.1);

– *очікування* – технологічна операція, яка потребує тільки витрат часу без витрат ресурсів (наприклад, технологічна перерва в роботі, очікування подачі локомотива, очікування прибирання вагонів тощо); на сітьовому графіку зазвичай позначається хвилястою стрілкою (робота *4* на рис. 11.1);

– *фіктивна робота* – вказує тільки на логічний зв’язок між роботами (їх взаємну зумовленість) та не потребує витрат ні часу (*тривалість фіктивною роботи дорівнює нулю*), ні ресурсів; на сітьовому графіку зазвичай позначається пунктирною стрілкою (наприклад, робота *3–6* на рис. 11.1 показує, що до початку роботи *9* необхідно закінчити не тільки роботу *6*, а й роботу *2*).

Вершинам на сітьовому графіку відповідають події. **Подія** – це фіксований факт, що визначає завершення та/або можливість початку однієї або декількох робіт. У кожної роботи є тільки одна початкова та тільки одна кінцева події. Події на графіку позначають кружечками (див. рис. 11.1).

На сітьовому графіку розрізняють такі події:

– *вихідна (початкова) подія* – факт початку технологічного процесу; не має вхідних робіт; на сітьовому графіку може бути тільки одна вихідна подія;

– *проміжна подія* – факт завершення всіх попередніх (вхідних) робіт та можливості початку всіх наступних (вихідних)робіт;

– *кінцева подія* – факт закінчення всіх робіт технологічного процесу; не має вихідних робіт; на сітьовому графіку може бути тільки одна кінцева подія.

Шлях – будь-яка послідовність робіт, що поєднує будь-які дві події. Тривалість шляху дорівнює сумарній тривалості робіт, що входять до нього. Розрізняють такі шляхи:

– *повний шлях* – послідовність робіт, що поєднує вихідну на кінцеву події сітьового графіка;

– *попередній шлях для події i* – послідовність робіт, яка поєднує вихідну подію та проміжну подію з номером *i*;

– *наступний шлях для події i* – послідовність робіт, яка поєднує проміжну подію з номером *i* та кінцеву подію;

– *критичний шлях* – повний шлях найбільшої тривалості.

У сітьовому графіку завжди декілька повних шляхів; максимальний з них – критичний. На сітьовому графіку критичний шлях зазвичай виділяють товстою лінією. Тривалість критичного шляху визначає тривалість виконання всього технологічного процесу. Очевидно, щоб зменшити тривалість усього процесу необхідно спрямовувати ресурси на скорочення тривалості, насамперед, тих робіт, які лежать на критичному шляху, а при реалізації розробленого технологічного процесу на практиці виконання саме цих, критичних, робіт слід особливо контролювати.

11.3. Порядок побудови сітьового графіка

Вихідними даними до побудови сітьового графіка є структурно-часова таблиця, яка являє собою список усіх робіт технологічного процесу, в якому вказуються їх тривалість та взаємна зумовленість [1, 2, 5]. Приклад такої структурно-часової таблиці наведено в табл. 11.1.

Таблиця 11.1

Приклад структурно-часової таблиці

Номер роботи	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Попередні роботи	–	–	1	1	2	2	2	3, 4, 5	6	6, 8
Тривалість роботи, хв	29	21	28	15	11	18	17	12	13	28

Взаємна зумовленість робіт визначається номерами попередніх робіт. Так, для технологічного процесу, наведеного в табл. 11.1, роботи *1* та *2* не потребують завершення будь-яких робіт і починаються одразу; для початку робіт *3* та *4* повинна завершитись робота *1*, а для початку роботи *8* повинні бути завершені роботи *3*, *4* , *5*.

Сітьовий графік будується відповідно до структурно-часової таблиці; при цьому необхідно дотримуватися таких правил:

1) сітьовий графік будується зліва направо;

2) графік починається з однієї вихідної події і закінчується однією кінцевою подією; тупики на графіку не допускаються;

3) кожна проміжна подія повинна мати хоча б одну попередню та одну наступну роботу;

4) по можливості, необхідно уникати перетинів ребер (робіт);

5) між двома подіями може бути тільки одна робота; якщо дві або більше робіт виконуються паралельно, то вводяться додаткові події та фіктивні роботи (рис. 11.2);

6) жоден шлях не може проходити двічі через одну й ту саму подію;

7) кожна робота повинна бути спрямована від події з меншим номером до події з більшим номером. З цією метою можна застосувати простий метод викреслювання, який полягає в такому. Спочатку присвоюють номер *1* вихідній події та «викреслюють» всі роботи, що з нього виходять. Потім знаходять події, до яких входять тільки «ви-

креслені» роботи. Ці події (їх може бути одна або більше) нумерують у довільній послідовності такими номерами *2*, *3*, … і т. д. Після цього «викреслюють» всі роботи, які виходять з нових пронумерованих подій і знову знаходять та нумерують наступними номерами події, до яких входять тільки «викреслені» роботи. Ця процедура повторюється доти, поки не будуть пронумеровані всі події;

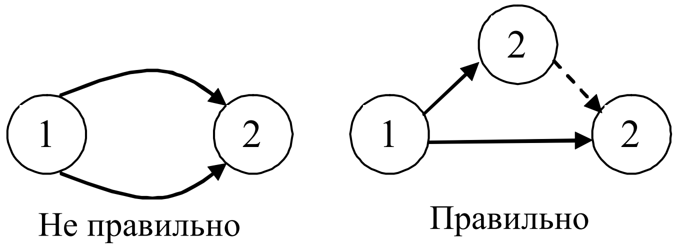


Рис. 11.2. Правила побудови паралельних робіт

8) якщо для виконання однієї (декількох) роботи необхідно отримати результати всіх попередніх робіт, а іншої (інших) – тільки деяких з цих робіт, то у графік вводять додаткові події та фіктивні роботи (рис. 11.3).

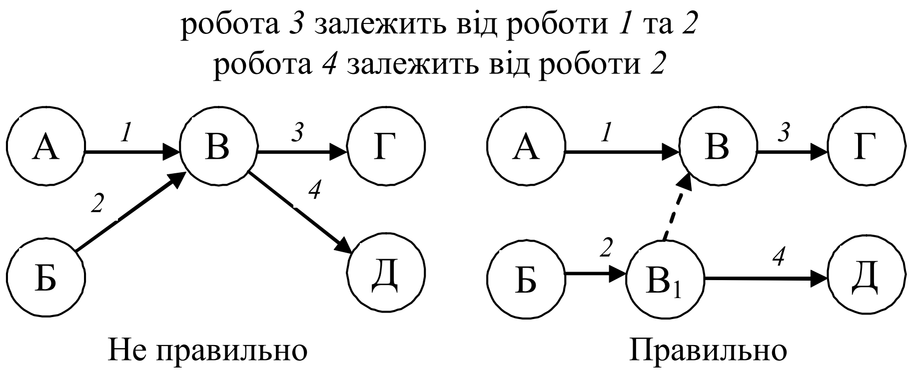


Рис. 11.3. Правила побудови залежних робіт

11.4. Розрахунок параметрів сітьового графіка

Розрахунок параметрів подій. Після побудови сітьового графіка визначаються його параметри, а саме: тривалість критичного шляху $T_{кр}$, тобто тривалість виконання всього комплексу робіт; найбільш ранній можливий та найбільш пізній допустимий строк здійснення події; резерви часу для подій та робіт, які не лежать на критичному шляху.

Зазвичай параметри графіка визначають секторним методом. При цьому кожна подія позначається кружечком, що розділений на 4 сектори (рис. 11.4).

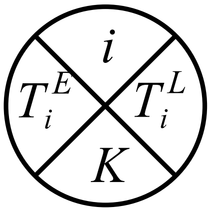


Рис. 11.4

На рис. 11.4. прийнято такі позначення:

i – номер події;

T_i^E – найбільш ранній можливий строк настання події, тобто тривалість максимального шляху, що передує цій події;

T_i^L – найбільш пізній допустимий строк настання події, тобто максимально допустимий час між початковою подією і цією подією, при якому тривалість критичного шляху $T_{\text{кр}}$ залишається незмінною;

K – номер попередньої події, яка знаходиться на максимальному шляху, що є попереднім для цієї події.

Найбільш ранній строк для події j розраховується за формулою:

$$T_j^E = \max_i \left\{ T_i^E + t_{ij} \right\}, \tag{11.1}$$

де i – номери всіх попередніх подій за кількістю робіт, що входять в подію j;

t_{ij} – тривалість роботи між подіями i та j;

Для фрагменту сітьового графіка, наведеного на рис. 11.5, ранній строк для події *3* складає

$$T_3^E = \max \left\{ T_1^E + t_1; T_2^E + t_2 \right\} = \max \left\{ 5 + 8; 10 + 15 \right\} = 25 .$$

Номер попередньої події K для події j визначає та подія i, за раннім строком якої було визначено ранній строк для події j; у прикладі, наведеному на рис. 11.5, для події *3* попередньою є подія *2*, тобто $K_3 = 2$.

Найбільш пізній строк для події і розраховується за формулою

$$T_i^L = \min_j \left\{ T_j^L - t_{ij} \right\}, \tag{11.2}$$

де j – номери всіх наступних подій за кількістю робіт, що виходять з події i.

Для фрагменту сітьового графіка, наведеного на рис. 11.6, пізній строк для події *1* складає

$$T_j^L = \min\left\{T_2^L - t_1; T_3^L - t_2\right\} = \min\left\{30-8; 25-15\right\} = 10.$$

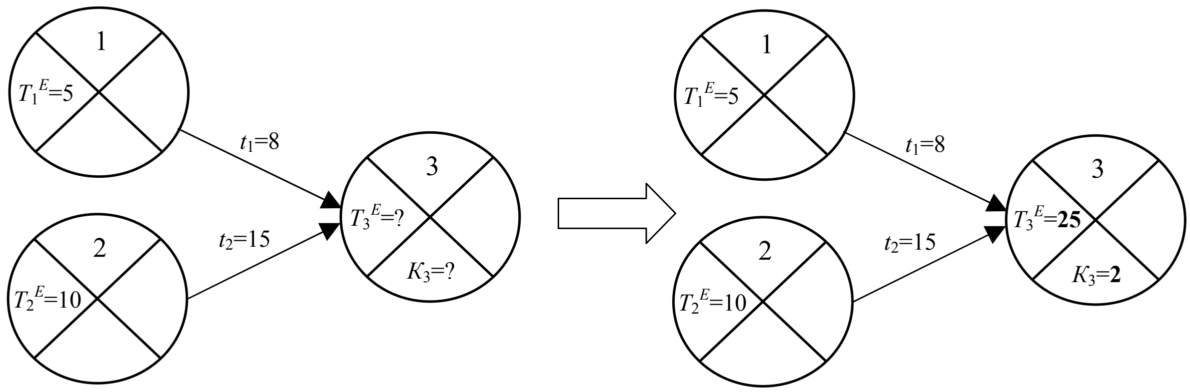


Рис. 11.5. Приклад розрахунку раннього строку для події

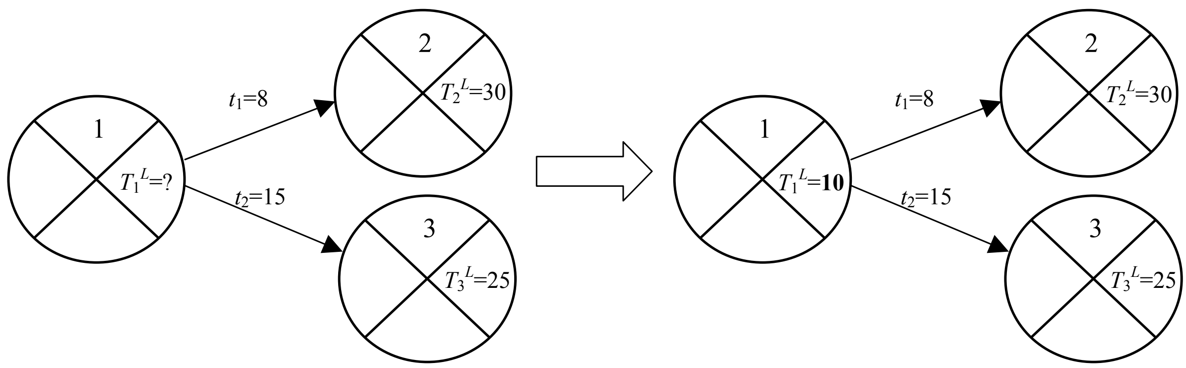


Рис. 11.6. Приклад розрахунку пізнього строку для події

Розрахунок параметрів сітьового графіка виконується двома етапами. На першому розрахунок починають з початкової події, встановлюючи $T_1^E = 0$. Потім, послідовно переходячи від події з меншим номером до події з більшим номером, за формулою (11.1) розраховують ранні строки настання подій T_i^E та номери попередніх подій K_i (заповнюють ліві та нижні сектори для подій). На другому етапі, рухаючись від кінцевої події до початкової, за формулою (11.2) визначають пізні строки для подій T_i^L, які записують у праві сектори. Розрахунок починають з кінцевої події, для якої пізній строк дорівнює ранньому і визначає тривалість критичного шляху: $T^L_{\text{кінц}} = T^E_{\text{кінц}} = T_{\text{кр}}$.

Критичний шлях визначається шляхом обходу сітьового графіка з кінцевої події до початкової відповідно до номерів попередніх подій K_i, що вказані в нижніх секторах. Критичний шлях, виділяється на сітьовому графіку.

Розрахунок резервів подій та робіт. Для подій та робіт, що не лежать на критичному шляху, існують резерви.

Резерв події показує, на скільки можливо затримати настання події без збільшення загальної тривалості виконання всього технологічного процесу. Для події *i* резерв визначається як

$$R_i = T_i^L - T_i^E,$$

де T_i^L, T_i^E – відповідно, пізній та ранній строки настання події *i*.

Для робіт *i–j*, що не лежать на критичному шляху (рис. 11.7), можливі такі резерви: повний $R^{\text{П}}_{i-j}$; вільний $R^{\text{В}}_{i-j}$; незалежний $R^{\text{Н}}_{i-j}$.

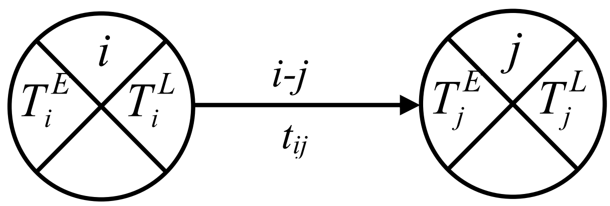


Рис. 11.7. Розрахункова схема
для визначення резервів робіт

Повний резерв $R^{\text{П}}_{i-j}$ показує допустиме збільшення тривалості роботи *i–j* або затримки її початку, при якому довжина максимального шляху, що проходить через цю роботу, не перевищить довжину критичного шляху (рис. 11.7):

$$R^{\text{П}}_{i-j} = T_i^L - T_i^E - t_{ij}.$$

При використанні повного резерву максимальний шлях, що проходить через роботу *i–j*, стає критичним, і всі роботи, які входять до складу цього шляху, втрачають свої резерви.

Вільний резерв $R_{i-j}^{\text{В}}$ показує максимальний час, на який можна збільшити тривалість роботи *i–j* або затримати її початок, якщо її початкова *i* та кінцева *j* події настануть у свої ранні строки (див. рис. 11.7):

$$R_{i-j}^{\text{В}} = T_j^E - T_i^E - t_{ij}\,.$$

Під час використання вільного резерву не змінюються вільні резерви інших робіт, якщо всі події настають у свої ранні строки.

Незалежний резерв $R_{i-j}^{\text{Н}}$ показує максимальний час, на який можна збільшити тривалість роботи *i–j* або затримати її початок незалежно від строків настання її початкової *i* та кінцевої *j* події (див. рис. 11.7):

$$R_{i-j}^{\text{Н}} = T_j^E - T_i^L - t_{ij}\,.$$

У разі використання незалежного резерву в будь-якому випадку резерви інших робіт не змінюються.

Для фрагменту сітьового графіка, наведеного на рис. 11.8, визначимо повний, вільний та незалежний резерви для роботи, що лежить між подіями *2* та *3*:

– повний резерв $R_{2-3}^{\text{П}} = T_3^L - T_2^E - t_{2-3} = 50 - 20 - 10 = 20$;
– вільний резерв $R_{2-3}^{\text{В}} = T_3^E - T_2^E - t_{2-3} = 40 - 20 - 10 = 10$;
– незалежний резерв $R_{2-3}^{\text{Н}} = T_3^E - T_2^L - t_{2-3} = 40 - 25 - 10 = 5$.

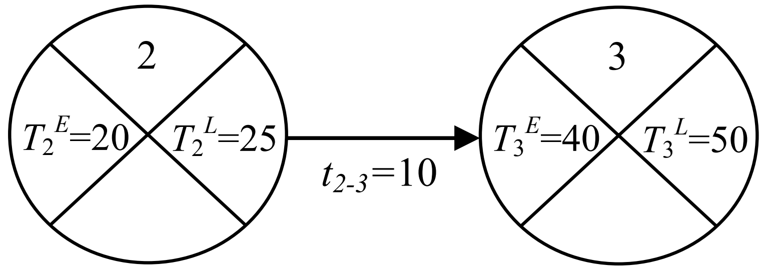


Рис. 11.8. Приклад розрахунку резервів для роботи

Роботи та події, що лежать на критичному шляху, не мають ніяких резервів.

Умова задачі. Технологічний процес роботи деякого транспортного об’єкта показано у вигляді структурно-часової таблиці робіт (див. табл. 11.1). Необхідно за даними структурно-часової таблиці побудувати сітьовий графік технологічного процесу, розрахувати його параметри й визначити резерви подій та робіт.

Розв'язання. На підставі структурно-часової таблиці робіт (див. табл. 11.1) побудовано сітьовий графік виконання технологічного процесу та розраховані параметри його вершин-подій (рис. 11.9).

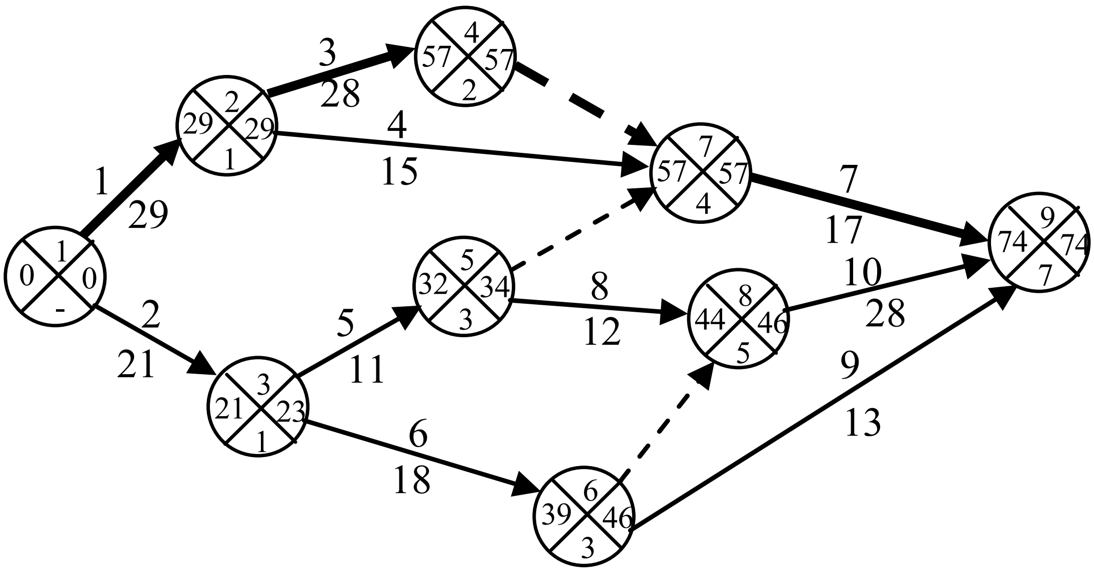


Рис. 11.9. Сітьовий графік виконання робіт технологічного процесу

Тривалість всього технологічного процесу визначають роботи, що входять до критичного шляху, а саме роботи *1*, *3*, *4–7* (фіктивна) та *7*. При цьому тривалість критичного шляху становить $T_{\text{кр}} = 29 + 28 + 0 + 17 = 74$ хв.

Для подій та робіт, які не лежать на критичному шляху, розраховані резерви, які наведені відповідно в табл. 11.2, 11.3.

Таблиця 11.2

Резерви подій

Номер події	Резерв події R_i
3	23 – 21 = 2
5	31 – 32 = 2
6	46 – 39 = 7
8	46 – 44 = 2

Таблиця 11.3

Резерви робіт

Робота	Повний резерв $R^{\text{П}}$	Вільний резерв $R^{\text{В}}$	Незалежний резерв $R^{\text{Н}}$
2	23 – 0 – 21 = 2	–	–
4	57 – 29 – 15 = 13	57 – 29 – 15 = 13	57 – 29 – 15 = 13
5	34 – 21 – 11 = 2	–	–
6	46 – 21 – 18 = 7	–	–
8	46 – 32 – 12 = 2	–	–
9	74 – 39 – 13 = 22	74 – 39 – 13 = 22	74 – 46 – 13 = 15
10	74 – 44 – 28 = 2	74 – 44 – 28 = 2	–

11.5. Оптимізація сітьових графіків

Постановка задачі оптимізації сітьових графіків. Сітьовий графік може бути використаний для оптимізації технологічного процесу. При цьому виникають класичні задачі дослідження операцій [1, 2, 5, 18]:

– які додаткові засоби та в які роботи необхідно вкласти, щоб загальна тривалість всього процесу не перевищила заданої величини, а витрати ресурсів були мінімальними;

– як треба перерозподілити ресурси від робіт, що мають резерви, до робіт, що їх не мають (лежать на критичному шляху), так, щоб тривалість виконання всього процесу була мінімальною;

– до яких меж можна збільшити виконання окремих робіт, щоб тривалість процесу була не більше заданої величини, а економія ресурсів була максимальною.

Необхідність оптимізації сітьового графіка може виникнути в тому випадку, коли загальний час виконання комплексу робіт T перевищує допустиму величину T_0. Виникає питання про те, як потрібно прискорити виконання певних робіт для того, щоб загальний час T не перевершував заданої величини T_0. Очевидно, що для цього необхідно прискорювати, насамперед, критичні роботи, зниження тривалості яких безпосередньо позначиться на часі T. Але це потребує вкладення деяких засобів. Виникає задача дослідження операцій: *які додаткові ресурси та у які роботи необхідно вкласти, щоб загальний час виконання комплексу робіт був не більше заданої величини T_0, а витрати додаткових засобів були мінімальними?*

Нехай комплекс (технологічний процес) включає n робіт з тривалістю виконання $t_1, t_2, \ldots, t_n$. Відомий критичний шлях, причому час виконання комплексу дорівнює $T = \sum_{\text{кр}} t_i > T_0$ (тобто в суму включаються тільки критичні роботи). Заданий допустимий термін виконання комплексу робіт дорівнює T_0.

Відомо, що вкладення певної суми x додаткових ресурсів у i-ту роботу скорочує час її виконання з t_i до $t_i' = f_i(x) < t_i$.

Необхідно визначити, які додаткові засоби $x_1, x_2, \ldots, x_n$ варто вкласти в кожну з критичних робіт, щоб:

– термін виконання комплексу був не більше заданого значення T_0;

– сума вкладених засобів досягала мінімуму.

Таким чином, потрібно визначити невід'ємні значення змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (додаткові вкладення ресурсів), при яких буде виконуватися умова

$$T' = \sum_{\text{кр}} f_i(x_i) \le T_0 .$$

У цій умові до суми включаються тривалості тільки тих робіт, які лежать на новому критичному шляху, що отриманий після перерозподілу засобів і зміни тривалості робіт. При цьому загальна сума додаткових вкладень ресурсів повинна бути мінімальною:

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i \to \min .$$

У випадку якщо час виконання робіт лінійно залежить від вкладених додаткових ресурсів, а критичний шлях не змінюється, поставлена задача є задачею лінійного програмування і може бути розв'язана відомими методами (наприклад, симплекс-методом).

Умова задачі. Деякий технологічний процес формалізований на основі структурно-часової таблиці (табл. 11.4).

Гранично допустима тривалість виконання всього технологічного процесу становить $T_0 = 40$ хв. Відомо, що в *i*-ту роботу можна вкласти деякий обсяг ресурсів x_i у розмірі не більше, ніж c_i. При цьому час виконання роботи зменшується відповідно до лінійної залежності:

$$t_i' = t_i\left(1 - b_i x_i\right), \quad x_i \le c_i .$$

Таблиця 11.4

Структурно-часова таблиця технологічного процесу

№ пор.	Попередні роботи	Тривалість t_i, хв	b_i	c_i
1	–	20	0,20	2,0
2	–	10	0,40	3,0
3	–	8	0,25	2,5
4	1, 2	20	0,30	2,0
5	1, 2, 3	10	0,20	3,0
6	1, 2, 3	5	0,15	4,0
7	6	5	0,30	3,5
8	4, 5, 7	10	0,10	5,0

Значення b_i та c_i задані в табл. 11.4. Потрібно визначити обсяги вкладень ресурсів у роботи так, щоб тривалість виконання технологічного процесу не перевищувала T_0, а загальний обсяг вкладень був мінімальним.

Розв'язання. Згідно до табл. 11.4 побудуємо сітьовий графік та виконаємо розрахунок його параметрів (рис. 11.10).

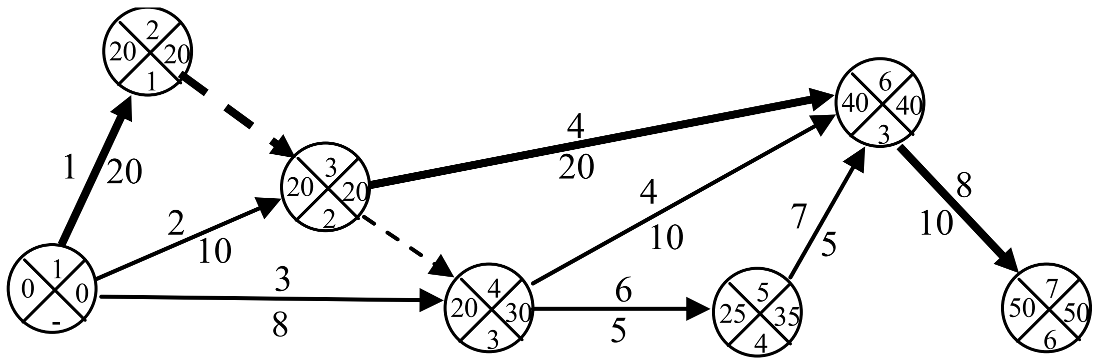


Рис. 11.10. Сітьовий графік до оптимізації технологічного процесу

Критичний шлях складається з робіт *1*, *4* та *8*. Тривалість технологічного процесу складає: $T = t_1 + t_4 + t_8 = 50$ хв.

Для зменшення тривалості технологічного процесу до $T_0 = 40$ хв необхідно насамперед зменшити тривалість критичних робіт *1*, *4* та *8*.

Складемо систему обмежень:

– обмеження за запасами ресурсів (за умовою $x_i \le c_i$):

$$2 - x_1 \ge 0, \; 2 - x_4 \ge 0, \; 5 - x_8 \ge 0;$$

– обмеження за тривалістю технологічного процесу (за умови, що критичний шлях не зміниться):

$$T' = t_1' + t_4' + t_8' \le 40.$$

Перетворимо вказану нерівність:

$$T' = t_1\left(1 - 0{,}2x_1\right) + t_4\left(1 - 0{,}3x_4\right) + t_8\left(1 - 0{,}1x_8\right) =$$

$$= 20\left(1 - 0{,}2x_1\right) + 20\left(1 - 0{,}3x_4\right) + 10\left(1 - 0{,}1x_8\right) = 50 - 4x_1 - 6x_4 - x_8 \le 40$$

або

$$4x_1 + 6x_4 + x_8 \ge 10.$$

Сформулюємо задачу лінійного програмування: *знайти невід'ємні значення змінних* x_1, x_4, x_8, *що задовольняють умови-обмеження*

$$2 - x_1 \ge 0, \; 2 - x_4 \ge 0, \; 5 - x_8 \ge 0, \; 4x_1 + 6x_4 + x_8 \ge 10,$$

при яких лінійна цільова функція обертається в мінімум: $C = x_1 + x_4 + x_8 \to \min$.

Ця задача може бути розв'язана за допомогою симплекс-методу.

Перетворимо обмеження, задані нерівностями, у рівняння шляхом введення додаткових змінних:

$$y_1 = 2 - x_1, \; y_2 = 2 - x_4, \; y_3 = 5 - x_8, \; y_4 = -10 + 4x_1 + 6x_4 + x_8.$$

Усього маємо 7 змінних та 4 рівняння; отже, у цій системі 4 базисних змінних (приймаємо y_1, y_2, y_3 та y_4) та 3 вільних (приймаємо x_1, x_4 та x_8).

Складемо симплекс-таблицю (табл. 11.5).

У результаті розв'язання задачі симплекс-методом (див. розд. 3) отриманий оптимальний розв'язок: $x_1 = 0$, $x_4 = 1{,}67$, $x_8 = 0$, загальний обсяг витрачених ресурсів при цьому складе $C = 1{,}67$.

Таким чином, оптимальне рішення передбачає вкладання ресурсів у розмірі $x_4 = 1,67$ тільки для скорочення роботи *4*; вкладення ресурсів у роботи *1* і *8* не передбачається. При цьому нова тривалість T' виконання робіт буде

$$T' = t_1 + t_4' + t_8 = 20 + 20\left(1 - 0,3 \cdot 1,67\right) + 10 = 20 + 10 + 10 = 40 \text{ хв.}$$

Таблиця 11.5

Симплекс-таблиця задачі оптимізації сітьового графіка

	b_i	x_1	x_4	x_8
C	0	–1	–1	–1
y_1	2	1	0	0
y_2	2	0	1	0
y_3	5	0	0	1
y_4	–10	–4	–6	–1

Таким чином, нова тривалість технологічного процесу не перевищує задану максимально допустиму величину T_0. Далі необхідно перевірити, чи збережеться при реалізації такого рішення критичний шлях? З цією метою необхідно виконати повторний розрахунок сітьового графіка при $t_4 = 10$ (рис. 11.11).

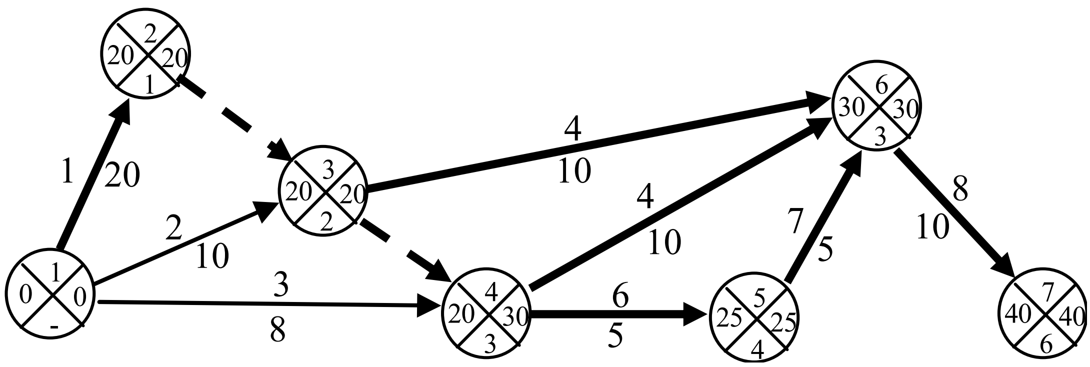


Рис. 11.11. Сітьовий графік після оптимізації технологічного процесу

Як видно з нового сітьового графіка, скорочення тривалості роботи *4* з 20 хв до 10 хв не змінює критичного шляху, однак при цьому з'являються два нових критичні шляхи (*1–5–8* та *1–6–7–8*) з тим самим критичним часом $T_0 = 40$ хв.

Контрольні запитання та завдання

1. У яких випадках використовується сітьове планування та управління?
2. Навести приклади задач СПУ на транспорті.
3. Пояснити пряму та обернену задачі дослідження операцій у СПУ.
4. Які основні особливості методів сітьового планування та управління?
5. Основні задачі сітьового планування та управління.
6. Що являє собою сітьовий графік? Основні його елементи.
7. Що таке «робота» в теорії сітьового планування та управління?
8. Які види робіт розрізняють у сітьовому графіку? Пояснити суть кожного виду робіт.
9. З якою метою використовуються фіктивні роботи в сітьовому графіку? Яка тривалість фіктивної роботи?
10. Що таке «подія» в теорії сітьового планування та управління?
11. Які види подій розрізняють у сітьовому графіку?
12. Що таке «шлях» у теорії сітьового планування та управління?
13. Які шляхи розрізняють у сітьовому графіку? Пояснити, що являє собою кожний вид шляху в сітьовому графіку?
14. Що є вихідними даними для сітьового планування та управління?
15. Які дані вказуються в структурно-часовій таблиці?
16. Основні правила побудови сітьового графіка.
17. Які дані вказують у секторах кружечка, яким позначається подія на сітьовому графіку?
18. За допомогою якого виразу визначають найбільш ранній можливий та найбільш пізній можливий строки здійснення події? Як визначити номер попередньої події?
19. Яким чином на сітьовому графіку визначити критичний шлях та його тривалість?
20. Що являє собою резерв події? Як він визначається?
21. Які види резервів розрізняють для робіт сітьового графіка? Що вони собою являють та як визначаються?
22. Чому дорівнюють резерви подій та робіт, які лежать на критичному шляху сітьового графіка?

23. Чому дорівнюють резерви для роботи, яка лежить на критичному шляху сітьового графіка?
24. Які оптимізаційні задачі можна вирішувати на основі аналізу сітьового графіка?
25. Як можна скоротити тривалість виконання технологічного процесу за рухунок оптимізації сітьового графіка?
26. За рахунок чого можна зменшити витрати ресурсів при оптимізації сітьового графіка?
27. Пояснити суть задачі оптимізації тривалості комплексу робіт з використанням методів СПУ.
28. Проаналізувавши фрагмент сітьового графіка, що зображений на рис. 11.12, встановити тривалість робіт *a*, *b*, *c*, а також параметри подій, які позначені символом *X*.

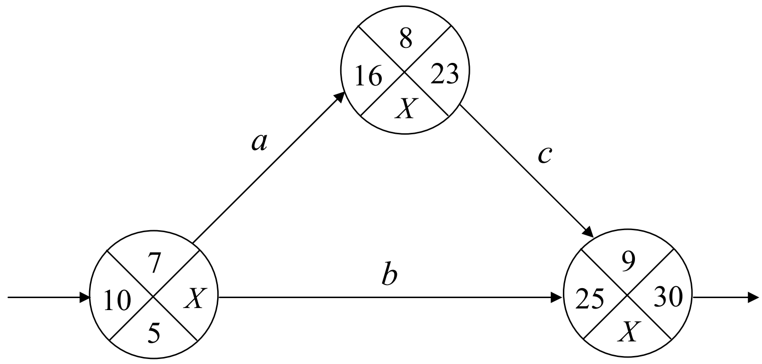


Рис. 11.12. Фрагмент сітьового графіка до задачі 28

29. Проаналізувавши фрагмент сітьового графіка, зображений на рис. 11.13, встановити тривалість робіт *a*, *b*, *c*, *d*, а також параметри подій, які позначені символом *X*.

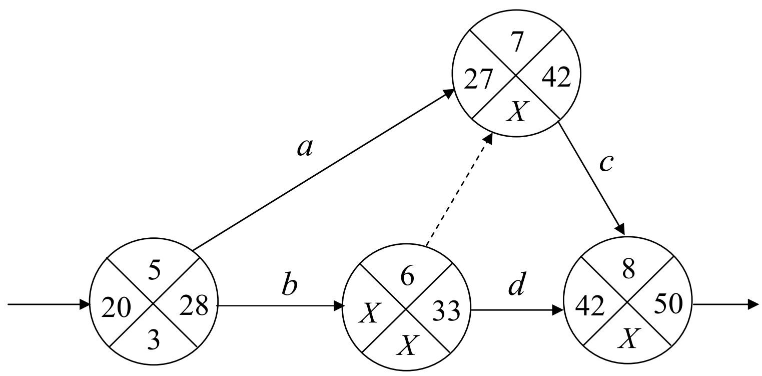


Рис. 11.13. Фрагмент сітьового графіка до задачі 29

30. На рис. 11.14 задано сітьовий графік. Якою буде тривалість виконання всього процесу, якщо тривалість роботи *5* збільшити на 2 години?

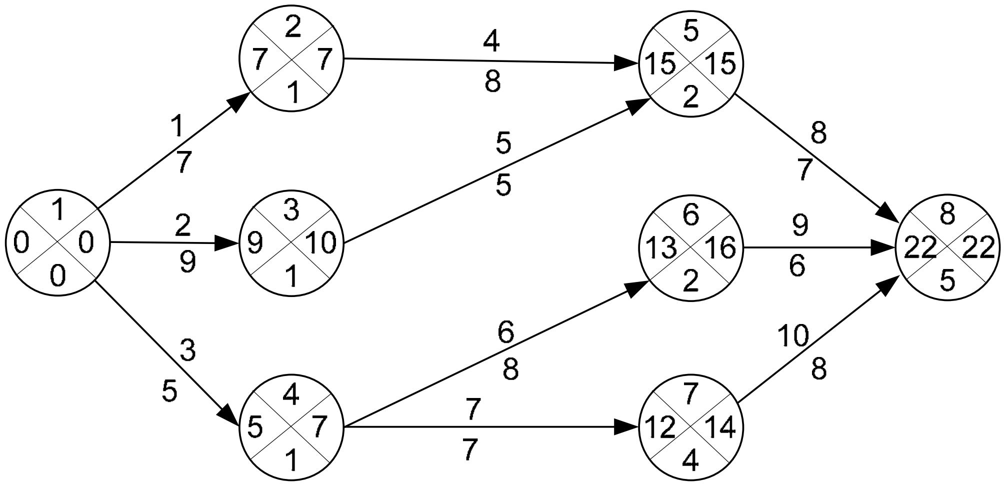


Рис. 11.14. Сітьовий графік до задачі 30

31. На рис. 11.15 задано сітьовий графік. Якою буде тривалість виконання всього процесу, якщо тривалість роботи *3* зменшити на 8 годин?

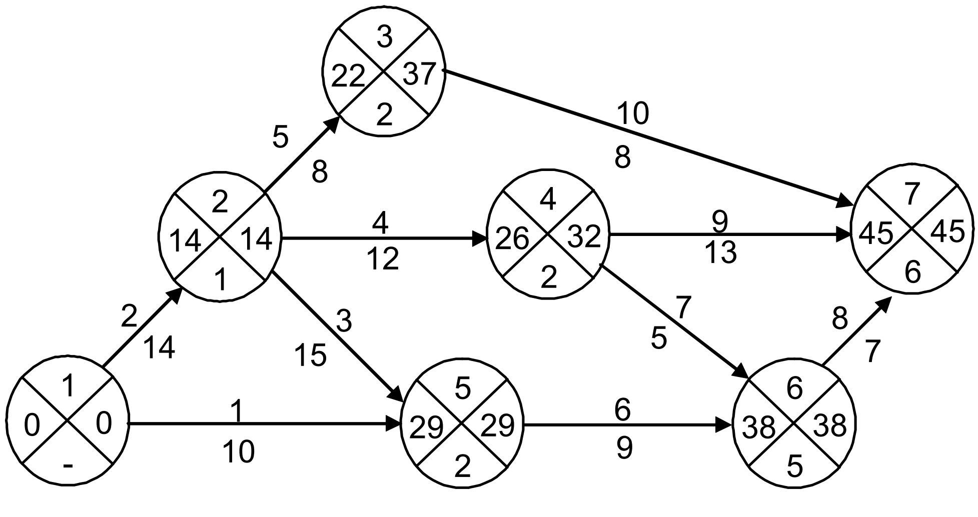


Рис. 11.15 Сітьовий графік до задачі 31

32. На рис. 11.16 задано сітьовий графік. Необхідно скласти структурно-часову таблицю виконання робіт, що відповідає сітьовому графіку.

33. Технологічний процес роботи деякого транспортного об'єкта показано у вигляді структурно-часової таблиці робіт (табл. 11.6). Необхідно за її даними побудувати сітьовий графік технологічного процесу, розрахувати його параметри й визначити резерви подій та робіт.

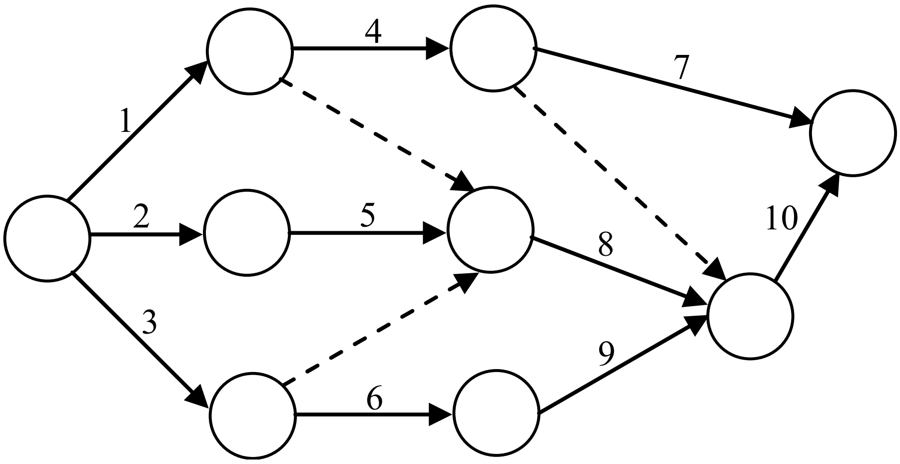


Рис. 11.16. Сітьовий графік до задачі 32

Таблиця 11.6

Структурно-часова таблиця до задачі 33

Номер роботи	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Попередні роботи	–	–	–	–	2	1, 3, 5	4, 6	4	8	7, 9
Тривалість роботи, хв	15	22	18	12	13	17	20	16	19	14

34. Деякий технологічний процес формалізований на основі структурно-часової таблиці (табл. 11.7). Гранично допустима тривалість виконання всього технологічного процесу становить $T_0 = 60$ хв. Відомо, що в i-ту роботу можна вкласти деякий обсяг ресурсів x_i у розмірі не більш, ніж c_i. При цьому час виконання роботи зменшується відповідно до лінійної залежності: $t_i' = t_i\left(1 - b_i x_i\right)$, $x_i \le c_i$. Вартість одиниці ресурсів при вкладанні у i-ту роботу становить α_i. Значення b_i, c_i та α_i задані у табл. 11.7. Потрібно визначити обсяги вкладень ресурсів у роботи так, щоб тривалість виконання технологічного не перевищувала T_0, а загальна вартість вкладень була мінімальною.

Таблиця 11.7

Структурно-часова таблиця до задачі 34

№ пор.	Попередні роботи	Тривалість t_i, хв	b_i	c_i	α_i, грн
1	–	10	0,23	3,0	4,0
2	–	15	0,15	4,0	3,0
3	1	12	0,18	5,0	2,5
4	2	25	0,12	4,5	3,0
5	2	35	0,20	3,0	5,0
6	2	18	0,30	2,0	3,5
7	3	20	0,22	3,0	4,5
8	1, 4	10	0,16	4,0	2,5
9	5, 6	17	0,25	3,5	4,0
10	3, 8, 9	13	0,10	5,0	2,0

РОЗДІЛ 12

Імітаційне моделювання транспортних систем

12.1. Імітаційне моделювання як інструмент дослідження складних систем

Поняття імітаційного моделювання. Функціонування складних динамічних систем, як правило, є стохастичним процесом, що, з одного боку, пов'язано зі складністю зв'язків та залежностей між елементами таких систем, які часто мають ймовірнісний характер, а з іншого – пояснюється значною кількістю випадкових факторів, що впливають на роботу складних систем. Така характеристика повною мірою стосується і транспортних систем. Так, унаслідок різноманітних причин транспортні потоки можуть характеризуватися значними коливаннями, що, у свою чергу, спричиняє нерівномірність у роботі транспортних систем, які обслуговують ці потоки. Окрім того, на роботу транспорту суттєво впливають як відмова технічних пристроїв, так і наявність людського фактору, що призводить до незапланованих відхилень у роботі.

Для дослідження функціонування складних систем, прогнозування їх поведінки в різних експлуатаційних умовах використовуються математичні моделі: аналітичні та статистичні (імітаційні). Однак побудувати адекватну аналітичну модель, у якій функціонування системи формалізується на основі алгебраїчних або диференціальних виразів, часто буває досить складно або взагалі неможливо. Тому при аналітичному аналізі складних стохастичних процесів приймаються ті чи інші припущення та спрощення, що зменшує рівень достовірності як самої аналітичної моделі, так і отриманих за її допомогою рішень.

Для моделювання складних динамічних процесів та врахування стохастичного характеру їх функціонування доцільно використовувати імітаційні моделі. Імітаційне моделювання є сучасним та потужним інструментом дослідження поведінки складних систем. Методи імітаційного моделювання дозволяють зібрати необхідну інформацію про поведінку системи в тих чи інших експлуатаційних умовах (за тих чи інших вхідних даних) шляхом створення та дослідження її комп'ютерної моделі. Імітаційне моделювання, на відміну від аналітичних моделей, безпосередньо не розв'язує оптимізаційних задач, а являє собою інструментарій для оцінки та прогнозування параметрів та функціональних характеристик системи, робота якої моделюється [2, 3, 16, 19–21].

Імітаційне моделювання (від лат. *imitatio* – наслідування, копіювання) означає процес імітування поведінки системи на моделі (здебільшого з використанням ЕОМ) з метою одержання характеристик цієї системи.

Дамо ще одне визначення. *Імітаційна модель* – логіко-математичний опис об'єкта (системи), який може бути використаний для виконання експериментів на ЕОМ з метою проектування, аналізу та оцінки функціонування об'єкта (системи). Іншими словами, сучасна імітаційна модель являє собою комп'ютерну програму-симулятор, яка описує структуру та відтворює поведінку існуючої або нової системи в часі. Таким чином, імітаційне моделювання базується на відтворенні (імітації) за допомогою ЕОМ розгорнутого у часі процесу функціонування системи з урахуванням її взаємодії із зовнішнім середовищем.

Під час розробки імітаційної моделі зазвичай детально моделюється функціонування лише тих елементів досліджуваного процесу, які найбільше цікавлять дослідника; для інших елементів моделюються лише кінцеві результати їх функціонування. Такий підхід дозволяє суттєво спростити побудову імітаційних моделей для складних систем.

Оскільки імітаційне моделювання застосовується для опису стохастичних процесів, то воно базується на використанні випадкових чисел, величин та функцій. При цьому для отримання оцінки параметрів системи із заданою точністю необхідно провести не один дослід, а серію експериментів з її імітаційною моделлю. Оцінку ж необхідних параметрів отримують шляхом статистичної обробки результатів експериментів. Кількість експериментів, яку необхідно виконати з моделлю, визначається вимогами до точності отриманих результатів та може бути встановлена статистичними методами.

Розрізняють два типи імітаційних моделей: неперервні; дискретні.

Неперервні моделі використовуються для моделювання та дослідження систем, поведінка яких змінюється неперервно в часі.

Дискретні моделі використовують для моделювання та дослідження систем, поведінка яких змінюється в певні моменти часу. До дискретних моделей також можна віднести подійні моделі, у яких моделювання процесу здійснюється дискретно від однієї події до іншої.

Структура та задачі імітаційного моделювання. Основною метою імітаційного моделювання є отримання якомога точніших даних про деякі параметри та поведінку певної системи в різних експлуатаційних умовах без виконання необхідних вимірів та експериментів безпосередньо на реальному об’єкті. Виходячи з цього, процес імітаційного моделювання включає розробку імітаційної моделі (комп’ютерної програми-симулятора), виконання серії імітаційних експериментів з нею та аналіз отриманих результатів. Загальний порядок побудови та використання імітаційної моделі включає [3, 18, 19, 21]:

1) аналіз структури об’єкта та опис його поведінки, аналіз взаємодії об’єкта із зовнішнім середовищем;

2) вибір інформативних параметрів об’єкта та ступеня деталізації структури об’єкта в моделі (визначається залежно від характеру поставленої задачі дослідження);

3) розробка концептуальної схеми об’єкта (формалізація) з урахуванням його взаємодії із зовнішнім середовищем;

4) підготовка вихідних даних, що відповідають різним експлуатаційним умовам функціонування об’єкта;

5) розробка діаграми (блок-схеми) імітаційної моделі;

6) реалізація моделі у вигляді комп’ютерної програми та її налагодження;

7) оцінка адекватності імітаційної моделі, тобто перевірка коректності (правильності) отриманих результатів при введенні «еталонних» вхідних даних; за необхідності, коригування моделі;

8) розробка плану проведення експериментів з імітаційною моделлю;

9) виконання серії імітаційних експериментів;

10) аналіз та інтерпретація отриманих результатів, формування висновків та пропозицій.

Аналіз переваг та недоліків імітаційного моделювання. Імітаційне моделювання наразі широко використовується під час виконання досліджень практично у всіх галузях людської діяльності, у т. ч. і для дослідження транспортних систем. Основними критеріями доцільності застосування імітаційного моделювання є:

– неможливість або значна складність побудови аналітичної моделі для дослідження системи;

– відсутність висококваліфікованого персоналу для роботи з аналітичними методами дослідження;

– необхідність контролю за поведінкою системи в часі з фіксуванням проміжних результатів;

– неможливість виконання експериментів у реальних умовах або з використанням фізичних моделей;

– необхідність зміни (масштабування) часової шкали, наприклад, для прискорення розвитку системи;

– необхідність виконання значного обсягу розрахунків, що потребує застосування ЕОМ.

Вказані умови можна розглядати як переваги імітаційних моделей порівняно з аналітичними. До переваг імітаційного моделювання можна також віднести можливість візуалізації процесу моделювання, що дозволяє досліднику наочно спостерігати за розвитком системи в часі. Це є досить корисним, у першу чергу, для дослідження поведінки нових систем під час їх проектування. Окрім того, імітаційні моделі є основою для створення навчальних тренажерів-симуляторів, на яких можна відпрацьовувати реальні виробничі ситуації, у т. ч. позаштатні.

Водночас імітаційне моделювання має і певні недоліки:

– розробка якісної імітаційної моделі складної системи потребує значних витрат ресурсів (коштів, часу) та залучення висококваліфікованих фахівців;

– будь-яка імітаційна модель у принципі не є аналогом реального об’єкта і тому не може повною мірою відображати всі деталі його функціонування в реальних умовах;

– оскільки імітаційне моделювання базується на використанні випадкових величин та функцій, то при цьому в принципі неможливо отримати абсолютно точний результат, що відповідав би реальному процесу; оцінка ж точності імітаційної моделі може бути виконана шляхом аналізу чутливості моделі до зміни вхідних параметрів її роботи.

12.2. Основні принципи моделювання випадкових подій та величин

Випадкові числа. Для моделювання випадкових процесів у імітаційних моделях використовують випадкові числа R_i, що рівномірно розподілені в інтервалі [0; 1]. Слід зазначити, що випадкові числа не можна обирати довільним способом, оскільки при цьому можна отримати не рівномірний розподіл, а зміщений. У разі ручного моделювання (не на ЕОМ) використовують таблиці випадкових чисел, а під час моделювання на ЕОМ замість випадкових чисел застосовують *псевдовипадкові числа*. Ці числа отримують на ЕОМ за допомогою спеціальних процедур – генераторів (датчиків) випадкових чисел (ГВЧ). При цьому в ГВЧ найчастіше використовується *мультиплікативний метод порівнянь*, коли кожне наступне випадкове число отримується із попереднього. Отримані таким чином числа по суті не є випадковими, але ведуть себе як випадкові – результати статистичного аналізу цих чисел такі самі, як і в дійсно випадкових чисел [2, 3, 19].

Наведемо приклад виразу, що використовується в ГВЧ:

$$n_{i+1} = \lambda n_i \bmod m,$$

де λ – випадково підібране число;

n_i – попереднє псевдовипадкове число;

$\bmod m$ – залишок від ділення на m.

Псевдовипадкове число R_i (далі – випадкове число) розраховується за виразом:

$$R_i = n_i / m.$$

Як початкове число n_0 обирається будь-яке непарне число, яке не кратне 5. Розглянемо приклад: нехай $\lambda = 91$, $n_0 = 5\,379$, $m = 10^4$, тоді:

$$n_1 = 91 \cdot 5\,379 \bmod 10^4 = 489\,489 \bmod 10^4 = 9\,489,$$

$$R_1 = 9\,489 / 10^4 = 0{,}9489;$$

$$n_2 = 91 \cdot 9\,489 \bmod 10^4 = 863\,499 \bmod 10^4 = 3\,499,$$

$$R_2 = 3\,499 / 10^4 = 0{,}3499;$$

$$n_3 = 91 \cdot 3\,499 \bmod 10^4 = 318\,409 \bmod 10^4 = 8\,409,$$

$$R_3 = 8\,409 / 10^4 = 0{,}8409;$$

Вибір параметрів λ, n_0 та m є досить важливим фактором, що визначає статистичні якості ГВЧ. Окрім того, одним з недоліків псевдовипадкових чисел є повторюваність послідовності значень після закінчення певного циклу; для отримання більшого циклу (довшої послідовності) необхідно обирати якомога більше значення параметра m.

Моделювання випадкових подій. Як відзначалось вище, імітаційне моделювання тісно пов'язане з поняттями та методами теорії ймовірностей. В основі будь-якої імітаційної моделі лежить моделювання випадкових подій та випадкових величин (ВВ).

Випадковою називається така подія, яка в результаті одиничного імітаційного досліду (одиничного жеребу) може настати або не настати.

Основною характеристикою випадкової події є ймовірність її настання. Ймовірність (частота) події визначається за формулою

$$P(A_i) = m_i / n_i, \tag{12.1}$$

де m – кількість дослідів, у яких відбувалась (або мала відбутись) подія A_i;

n – загальна кількість дослідів.

Для моделювання окремих подій необхідно проімітувати виконання досліду, у якому випадкова подія А може настати із ймовірністю $P(A)$. Моделювання може бути виконано графічним методом. Для цього необхідно попередньо побудувати одиничний відрізок, на якому треба відкласти ймовірність $P(A)$. Для імітації окремого досліду потрібно з таблиці випадкових чисел, що рівномірно розподілені в інтервалі [0; 1], вибрати чергове число R_i і відкласти його на одиничному відрізку. Якщо випадкове число R_i потрапило на відрізок, відповідний $P(A)$, то вважається, що в цьому досліді подія A відбулася; в протилежному випадку – вважається, що подія A не відбулася.

Так, на рис. 12.1 у першому досліді (випадкове число R_1) подія A відбулася, а у другому (випадкове число R_2) – ні.

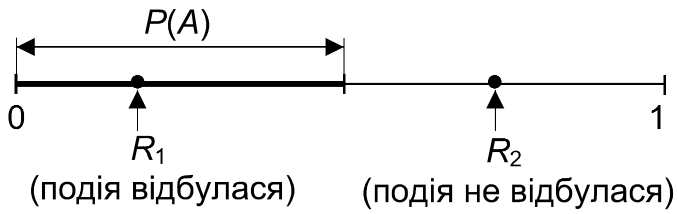


Рис. 12.1. Моделювання окремої події графічним методом

Очевидно, що моделювання може бути виконано і без рисунка, аналітичним методом. Для цього потрібно вибрати чергове випадкове число R_i і порівняти його із ймовірністю настання події $P(A)$: якщо $R_i < P(A)$, то вважається, що в цьому досліді подія A відбулася; у протилежному випадку – подія A не відбулася.

Якщо за умовами досліду в його результаті обов'язково повинна відбутися тільки одна подія із деякої множини подій A_1, A_2, …, A_k, то вважають, що вони утворюють *повну групу несумісних подій*. Сума ймовірностей таких подій дорівнює одиниці, тобто

$$P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_k)=1.$$

Для графічного моделювання подій, які утворюють повну групу, необхідно поділити одиничний відрізок на k частин довжиною, що відповідає значенням $P(A_1), P(A_2), \ldots, P(A_k)$. Для імітації окремого досліду необхідно з таблиці випадкових чисел, рівномірно розподілених в інтервалі [0; 1], вибрати чергове число R_i та відкласти його на одиничному відрізку. Вважається, що в цьому досліді відбулася подія A_i ($i=1\ldots k$), якщо випадкове число потрапило на відрізок, відповідний $P(A_i)$. Наприклад, на рис. 12.2 відбулася подія A_2.

При аналітичному моделюванні випадкових подій повної групи необхідно із таблиці рівномірно розподілених випадкових чисел вибрати число R_i і по черзі порівняти його із сумами ймовірностей $P(A_1), P(A_1)+P(A_2), \dots, P(A_1)+P(A_2)+\dots+P(A_{k-1})$. У випадку, якщо $R_i < P(A_1)$, то відбулася подія A_1; інакше, якщо $R_i < P(A_1)+P(A_2)$, то відбулася подія A_2; інакше, …, якщо $R_i < P(A_1)+P(A_2)+\dots+P(A_{k-1})$, то – подія A_{k-1}; інакше відбулася подія A_k.

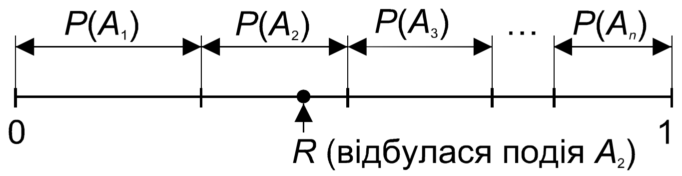


Рис. 12.2. Моделювання графічним методом випадкових подій, які утворюють повну групу несумісних подій

Якщо в результаті серії імітаційних експериментів події A_1, A_2, …, A_k повинні настати відповідно рівно m_1, m_2, m_k раз $(m_1 + m_2 + \dots + m_k = n)$, то маємо *випадкову суміш*. Основним принципом імітаційного моделювання випадкової суміші є перерахунок ймовірностей настання подій перед виконанням чергового досліду з урахуванням результатів попереднього досліду. При цьому моделювання настання події в кожному з дослідів виконується аналогічно моделюванню повної групи несумісних подій. Так, на початку першого досліду ймовірності настання подій $P_1(A_1), P_1(A_2), \dots, P_1(A_k)$ встановлюються за формулою (12.1). Якщо в результаті досліду відбулась подія A_i, то для наступного досліду $m_i = m_i - 1$, $n = n - 1$, а ймовірність настання всіх подій перераховується відповідно до нових значень m_i та *n*. Зазначимо, що для кожного *j*-го досліду при моделюванні випадкової суміші $P_j(A_1) + P_j(A_2) + \dots + P_j(A_k) = 1$.

Основні характеристики випадкових величин. *Випадковою* є така величина, яка в результаті одиничного досліду набуває деякого значення, причому до проведення досліду невідомо якого. Випадкові величини поділяють на дискретні й неперервні.

Дискретними є величини, окремі можливі значення яких можна перерахувати (кількість вагонів у составі, кількість пасажирів у поїзді та ін.).

Неперервні випадкові величини – це такі величини, можливі значення яких заповнюють деякий інтервал на числовій осі (інтервал між поїздами, тривалість технічного огляду состава, маса вагона та ін.).

Основною характеристикою ВВ є закон її розподілу. *Законом розподілу випадкової величини* називають будь-яке співвідношення, що встановлює зв'язок між можливими значеннями величини та відповідними їм ймовірностями. Зазвичай закон розподілу випадкової величини представляють за допомогою *інтегральної функції розподілу* $F(x)$, яка для кожного значення x визначає ймовірність події $X < x$: $F(x) = P(X < x)$, тобто ймовірність того, що випадкова величина X у деякому досліді буде меншою за x.

Інтегральна функція розподілу $F(x)$ випадкової величини є її вичерпною характеристикою, але за нею досить складно робити висновки про власне характер розподілу; більш наочне уявлення про нього дає *диференціальна функція розподілу* $f(x) = F'(x)$, яку ще називають *щільністю розподілу* випадкової величини.

Закон розподілу ВВ можна задавати графічно (рис. 12.3), аналітично (на основі функцій $F(x)$ або $f(x)$, а також за допомогою статистичного ряду розподілу (табл. 12.1).

Таблиця 12.1

Приклад статистичного ряду розподілу

x_i	0…20	20…40	40…60	60…80	80…100
$P(x_i)$	0,10	0,20	0,30	0,25	0,15

Функції розподілу для неперервних ВВ можуть бути задані аналітичними виразами. Нижче, для прикладу, наведено основні функції розподілу неперервних випадкових величин, які використовуються для моделювання транспортних процесів.

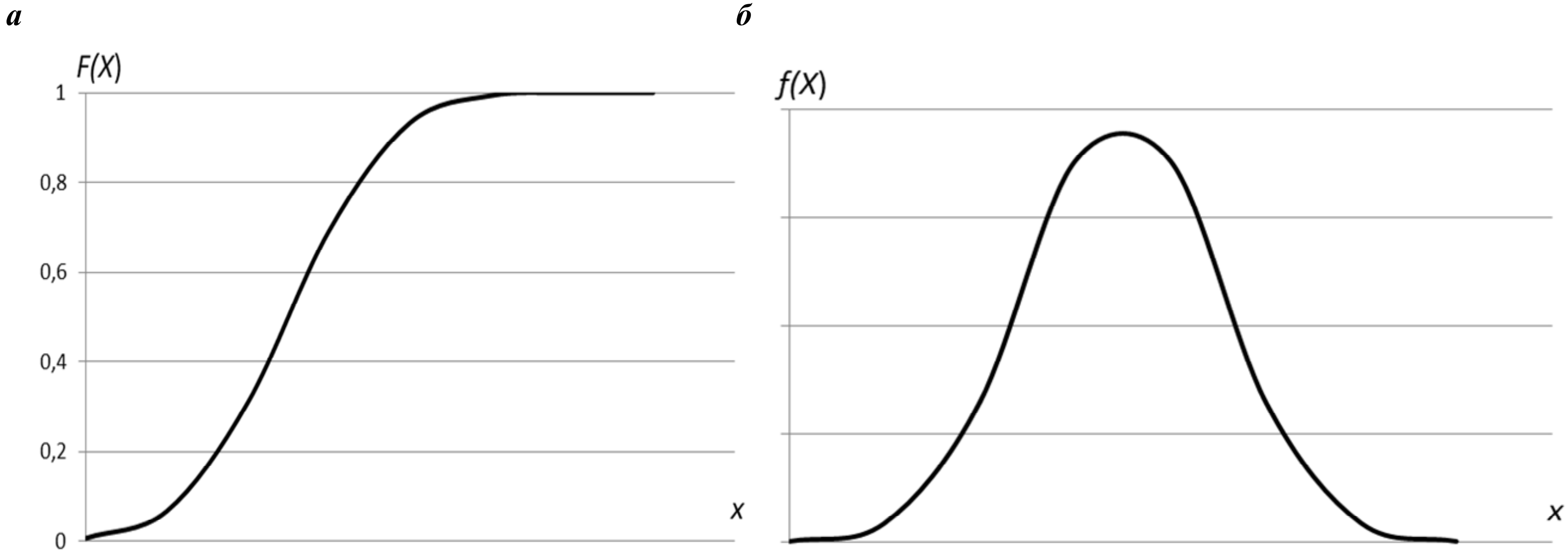


Рис. 12.3. Графічне зображення закону розподілу випадкової величини:
а – інтегральною функцією розподілу; *б* – диференціальною функцією розподілу

Розподіл Ерланга:

$$F(x)=1-e^{-\lambda kx}\sum_{i=0}^{k-1}\frac{(\lambda kx)^i}{i!}, \qquad (12.2)$$

де λ – інтенсивність вхідного потоку заявок;

k – параметр Ерланга $(k=1, 2, ...)$.

При $k=1$ (*показниковий розподіл*) функція (12.2) має вигляд

$$F(x)=1-e^{-\lambda x}, \qquad (12.3)$$

а при $k=2$

$$F(x)=1-(1+2\lambda x)e^{-2\lambda x}. \qquad (12.4)$$

Рівномірний розподіл:

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x\le x_{\min};\\ \dfrac{x-x_{\min}}{x_{\max}-x_{\min}}, & \text{при } x_{\min}<x<x_{\max};\\ 1, & \text{при } x\ge x_{\max},\end{cases}$$

де $x_{\min}$, $x_{\max}$ – відповідно нижня та верхня межі випадкової величини.

Основними числовими характеристиками ВВ є математичне сподівання, дисперсія та середнє квадратичне відхилення.

Математичним сподіванням $M[X]$ випадкової величини X називають суму добутків усіх її можливих значень x_i на відповідні їм ймовірності p_i. Статистичною оцінкою математичного сподівання є середнє значення випадкової величини. Математичне сподівання дискретної випадкової величини

$$M[X]=\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot p_i .$$

Математичне сподівання неперервної випадкової величини

$$M[X]=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f(x)dx .$$

Дисперсія $D[X]$ випадкової величини та *середнє квадратичне відхилення* $\sigma[X]$ характеризують міру розсіювання окремих значень випадкової величини X навколо її математичного сподівання.

Дисперсія визначається за формулами:

– для дискретних випадкових величин:

$$D[X] = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - M[X]\right)^2 \cdot p_i = M\left[X^2\right] - \left(M[X]\right)^2;$$

– для неперервних випадкових величин:

$$D[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - M[X]\right)^2 \cdot f(x)\,dx.$$

Середнє квадратичне відхилення визначається за формулою:

$$\sigma[X] = \sqrt{D[X]}.$$

Методи моделювання випадкових величин. У процесі імітаційного моделювання окремі значення випадкових величин можуть бути отримані графічним та аналітичним методами [19].

Графічний метод полягає в такому. З використанням відповідного виразу для різних значень випадкової величини X розраховуються значення інтегральної функції розподілу $F(x)$ та за отриманими значеннями будується графік функції $F(x)$ (рис. 12.4). Далі необхідно вибрати чергове випадкове число R_i, що рівномірно розподілене в інтервалі [0; 1], та відкласти його на осі ординат. Від числа R_i на осі ординат провести лінію, яка паралельна осі абсцис, до перетину з графіком функції $F(x)$; з точки перетину опустити вертикальну лінію на вісь абсцис та визначити відповідне значення випадкової величини x.

При виконанні імітаційного моделювання на ЕОМ окремі значення ВВ доцільно отримувати аналітичними методами. Нижче наведено вирази для аналітичного моделювання випадкових величин для найбільш поширених законів розподілу [19].

Розподіл Ерланга:

$$x_i = -\frac{M\left[X\right]}{k}\ln\prod_{j=1}^{k} R_j\,, \tag{12.5}$$

де $M\left[X\right]$ – математичне сподівання випадкової величини *X*;

k – параметр Ерланга;

R_j – випадкові числа, що рівномірно розподілені в інтервалі $[0, 1]$;

$\prod_{j=1}^{k} R_j$ – добуток *k* випадкових чисел R_j.

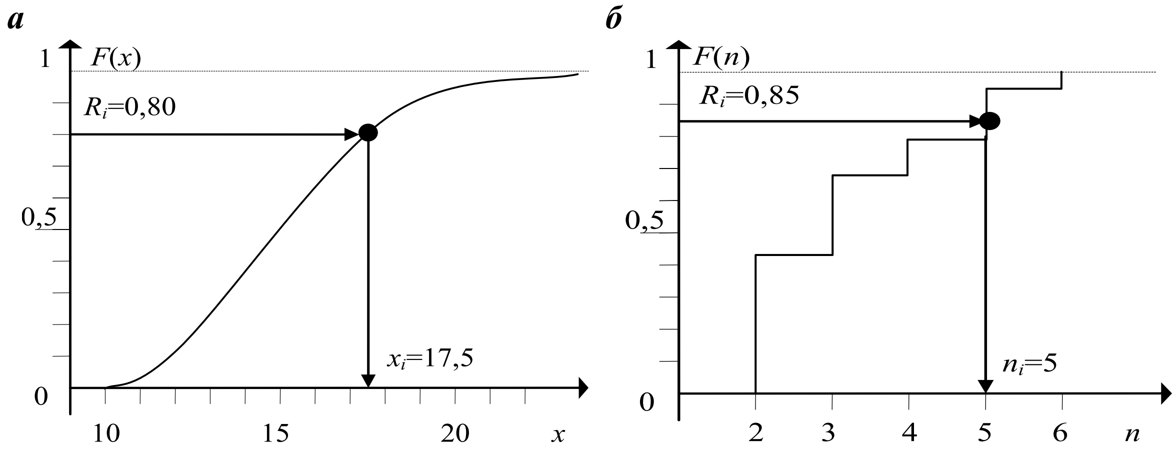


Рис. 12.4. Графічне моделювання значень випадкових величин:
а – неперервної; *б* – дискретної

Якщо всі значення x_i випадкової величини *X* обмежені знизу $\left(x_i > x_{\min}\right)$, то вираз для моделювання має вигляд:

$$x_i = \frac{x_{\min} - M\left[X\right]}{k}\ln\prod_{j=1}^{k} R_j + x_{\min}\,. \tag{12.6}$$

Показниковий розподіл:

$$x_i = -M\left[X\right]\ln R_i\,. \tag{12.7}$$

Нормальний розподіл:

$$x_i = M\left[X\right] + \sigma\left[X\right] Z_i, \tag{12.8}$$

де $\sigma\left[X\right]$ – середнє квадратичне відхилення випадкової величини X;

Z_i – випадкове число, що розподілене за нормальним законом з параметрами $M\left[Z\right]=0$, $\sigma\left[Z\right]=1$. Числа Z_i наближено можуть бути визначені за виразом

$$Z_i = \sum_{j=1}^{12} R_j - 6. \tag{12.9}$$

Рівномірний розподіл неперервних випадкових величин:

$$x_i = x_{\min} + \left(x_{\max} - x_{\min}\right) R_i, \tag{12.10}$$

де $x_{\min}$, $x_{\max}$ – відповідно нижня та верхня межі випадкової величини X.

Рівномірний розподіл дискретних випадкових величин:

$$n_i = n_{\min} + \left\lfloor \left(n_{\max} - n_{\min} + 1\right) R_i \right\rfloor, \tag{12.11}$$

де $\left\lfloor a \right\rfloor$ – операція здобуття цілої частини числа a, тобто округлення числа в меншу сторону до цілого значення;

$n_{\min}$, $n_{\max}$ – відповідно найменше та найбільше можливе значення випадкової величини N.

Окремий випадок наявний, коли $n_{\min} = 1$; тоді вираз має вигляд:

$$n_i = 1 + \left\lfloor n_{\max} R_i \right\rfloor.$$

Біноміальний розподіл. Біноміальним є закон розподілу дискретної випадкової величини N, що визначає кількість випадків n появи деякої події в k незалежних дослідах, у кожному з яких ймовірність цієї події дорівнює p:

$$n_i = \sum_{j=1}^{k} w_j, \text{ де } \begin{cases} w_j = 1, \text{ якщо } R_j < p; \\ w_j = 0, \text{ якщо } R_j \geq p. \end{cases} \tag{2.12}$$

Розподіл Пуассона. Закон Пуассона визначає кількість випадків n настання деякої випадкової події за одиницю часу, якщо інтенсивність її настання дорівнює λ $\left(\lambda = 1/M\left[T\right]\right.$, де $M\left[T\right]$ – математичне сподівання випадкової величини інтервалу між подіями). Для моделювання випадкової величини n_i необхідно знайти добуток m випадкових чисел R_j, який буде меншим за $e^{-\lambda}$:

$$n_i = m_i - 1, \text{ якщо } \prod_{j=1}^{m} R_j < e^{-\lambda}, \text{ де } m = 1, 2, \ldots. \tag{2.13}$$

12.3. Моделювання роботи приймально-відправного парку як одноканальної системи масового обслуговування

Розглянемо основні принципи імітаційного моделювання на прикладі імітаційної моделі приймально-відправного парку сортувальної станції.

Умова задачі. До приймально-відправного парку сортувальної станції з трьох напрямків *А*, *Б* і *В* прибувають вантажні транзитні поїзди та поїзди у розформування. Протягом доби прибуває в середньому $N_A = 15$ поїздів з напрямку *А*, $N_Б = 19$ поїздів з напрямку *Б* і $N_В = 16$ поїздів з напрямку *В*. Ймовірність того, що поїзд із напрямку *А* транзитний дорівнює $P\left(\text{Тр}\middle|A\right) = 0{,}4$, із напрямку *Б* – $P\left(\text{Тр}\middle|Б\right) = 0{,}8$, із напрямку *В* – $P\left(\text{Тр}\middle|В\right) = 0{,}6$.

Інтервал t прибуття поїздів у парк є випадковою величиною T, що розподілена за законом Ерланга з параметрами: математичне сподівання $M\left[T\right] = 1\,440/\left(N_A + N_Б + N_В\right)$ та параметр Ерланга $k = 1$.

Кількість вагонів у поїзді є випадковою величиною, що рівномірно розподілена в інтервалі $\left[m_{\min} = 48; m_{\max} = 62\right]$. Технічний огляд составів виконує одна бригада пункту технічного обслуговування (ПТО), що складається з трьох груп. Середня тривалість обробки одного вагона є нормально розподіленою випадковою величиною з математичним сподіванням $M\left[\tau_B\right]=1{,}10$ хв і середнім квадратичним відхиленням $\sigma\left[\tau_B\right]=0{,}23$ хв. Після технічного огляду транзитного поїзда виконуються операції з його відправлення тривалістю 8 хв, а після огляду поїзда, що прибув у розформування, виконується розпуск состава поїзда на сортувальній гірці тривалістю 12 хв.

Виконати моделювання прибуття та обслуговування 50 поїздів. При цьому значення інтервалів між поїздами промоделювати графічним способом, а кількість вагонів у поїздах та тривалість їх технічного огляду – аналітичними методами. За результатами моделювання визначити середню тривалість очікування поїздом обслуговування, середній простій бригади ПТО в очікуванні поїзда, коефіцієнт завантаження бригади ПТО, середню тривалість зайняття колії поїздом, необхідну кількість колій у парку.

Розв'язання. Приймально-відправний парк сортувальної станції може розглядатися як система масового обслуговування (СМО). Вхідний потік створюють поїзди, які прибувають в обробку, а обслуговуючим пристроєм (каналом обслуговування) є бригада ПТО. Оскільки обслуговування поїздів здійснює одна бригада ПТО, то парк являє собою одноканальну СМО. Чергу створюють поїзди, що очікують обслуговування. Після закінчення обслуговування поїзд залишає систему (відправляється або розформовується). Для детальнішого розгляду принципів імітаційного моделювання задачу побудови імітаційної моделі приймально-відправного парку розіб'ємо на окремі етапи, на кожному з яким будемо визначати певні параметри вхідного потоку поїздів та системи їх обслуговування в парку:

– визначення напрямку та категорії поїздів, що прибувають у парк;
– моделювання (графічним способом) інтервалів між поїздами;
– моделювання тривалості технічного обслуговування поїздів у парку;
– моделювання роботи приймально-відправного парку з обслуговування потоку поїздів та визначення показників роботи парку за результатами моделювання.

Для моделювання використовуємо згенеровані за допомогою ЕОМ випадкові числа, що рівномірно розподілені в інтервалі [0; 1].

Моделювання напрямку прибуття та категорії поїздів. Ймовірність (частоту) прибуття поїзда з кожного напрямку визначаємо за формулою (12.1). Ймовірність прибуття поїзда з *А*: $P_A=\dfrac{15}{15+19+16}=\dfrac{15}{50}=0{,}30$. Ймовірність прибуття поїздів з *Б* та *В* відповідно: $P_Б=19/50=0{,}38$, $P_В=16/50=0{,}32$.

Одиничний відрізок для моделювання напрямку прибуття поїзда зображено на рис. 12.5. Вибираємо перше випадкове число: $R_1=0{,}08$ та відкладаємо його на відрізку (рис. 12.5). Оскільки воно потрапило на ділянку P_A, то вважаємо, що перший поїзд прибув з напрямку *А*.

Для моделювання категорії поїзда, що прибуває у парк, побудуємо три одиничні відрізки, кожний з яких відповідає певному напрямку прибуття (рис. 12.6).

Вибираємо друге випадкове число $R_2 = 0,63$ і відкладаємо його на відрізку *А*, що відповідає напрямку прибуття першого поїзда. Оскільки число R_2 попало на ділянку «Розф», то вважаємо, що перший поїзд прибуває у розформування (має категорію «Р»).

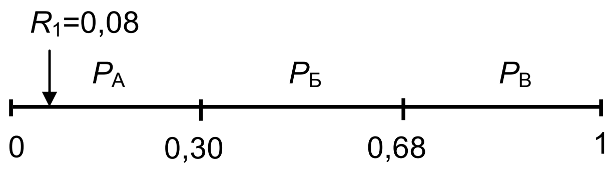


Рис. 12.5. Моделювання напрямку прибуття поїздів

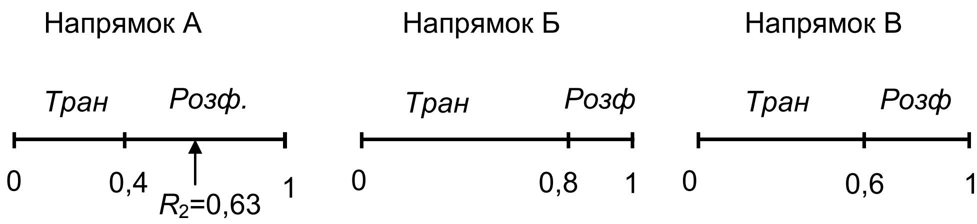


Рис. 12.6. Моделювання категорії поїздів

Моделювання напрямку прибуття та категорії всіх інших поїздів виконується аналогічно та зведено в табл. 12.2.

Таблиця 12.2

Моделювання прибуття поїздів у парк станції

№ пор.	R_1	Напрям	$P(\text{Тр})$	R_2	*Т*/*Р*	№ пор.	R_1	Напрям	$P(\text{Тр})$	R_2	*Т*/*Р*
1	0,08	*А*	0,4	0,63	*Р*	26	0,86	*В*	0,6	0,42	*Т*
2	0,49	*Б*	0,8	0,81	*Р*	27	0,66	*Б*	0,8	0,77	*Т*
3	0,76	*В*	0,6	0,40	*Т*	28	0,97	*В*	0,6	0,74	*Р*
4	0,95	*В*	0,6	0,69	*Р*	29	0,62	*Б*	0,8	0,59	*Т*
5	0,82	*В*	0,6	0,46	*Т*	30	0,88	*В*	0,6	0,85	*Р*
6	0,18	*А*	0,4	0,43	*Р*	31	0,73	*В*	0,6	0,19	*Т*
7	0,52	*Б*	0,8	0,74	*Т*	32	0,61	*Б*	0,8	0,99	*Р*
8	0,08	*А*	0,4	0,72	*Р*	33	0,02	*А*	0,4	0,61	*Р*

Закінчення табл. 12.2

№ пор.	R_1	Напрям	$P(\text{Тр})$	R_2	*Т/Р*	№ пор.	R_1	Напрям	$P(\text{Тр})$	R_2	*Т/Р*
9	0,66	*Б*	0,8	0,83	*Р*	34	0,19	*А*	0,4	0,79	*Р*
10	0,22	*А*	0,4	0,96	*Р*	35	0,15	*А*	0,4	0,55	*Р*
11	0,98	*В*	0,6	0,73	*Р*	36	0,25	*А*	0,4	0,04	*Т*
12	0,08	*А*	0,4	0,25	*Т*	37	0,11	*А*	0,4	0,69	*Р*
13	0,95	*В*	0,6	0,51	*Т*	38	0,55	*Б*	0,8	0,99	*Р*
14	0,79	*В*	0,6	0,90	*Р*	39	0,49	*Б*	0,8	0,77	*Т*
15	0,29	*А*	0,4	0,16	*Т*	40	0,03	*А*	0,4	0,22	*Т*
16	0,28	*А*	0,4	0,38	*Т*	41	0,37	*Б*	0,8	0,25	*Т*
17	0,34	*Б*	0,8	0,48	*Т*	42	0,10	*А*	0,4	0,86	*Р*
18	0,09	*А*	0,4	0,64	*Р*	43	0,72	*В*	0,6	0,34	*Т*
19	0,08	*А*	0,4	0,74	*Р*	44	0,14	*А*	0,4	0,78	*Р*
20	0,35	*Б*	0,8	0,29	*Т*	45	0,96	*В*	0,6	0,73	*Р*
21	0,46	*Б*	0,8	0,51	*Т*	46	0,42	*Б*	0,8	0,99	*Р*
22	0,69	*В*	0,6	0,90	*Р*	47	0,90	*В*	0,6	0,18	*Т*
23	0,48	*Б*	0,8	0,81	*Р*	48	0,04	*А*	0,4	0,32	*Т*
24	0,89	*В*	0,6	0,56	*Т*	49	0,38	*Б*	0,8	0,05	*Т*
25	0,89	*В*	0,6	0,52	*Т*	50	0,42	*Б*	0,8	0,07	*Т*

За результатами моделювання (табл. 12.2) визначено, що за добу в приймально-відправний парк сортувальної станції прибуває 25 транзитних поїздів («Т») та 25 поїздів у розформування («Р»). Таким чином, частота прибуття транзитних поїздів, отримана за результатами моделювання, становить: $P(\text{Тр})_{\text{мод}} = 25/50 = 0{,}50$.

Аналітично ймовірність прибуття транзитного поїзда визначається за формулою повної ймовірності:

$$P(\text{Тр}) = P_A P(\text{Тр}|A) + P_Б P(\text{Тр}|Б) + P_В P(\text{Тр}|В) =$$

$$= 0{,}3 \cdot 0{,}4 + 0{,}38 \cdot 0{,}8 + 0{,}32 \cdot 0{,}6 = 0{,}62\,.$$

Відмінність у значеннях статистичної (0,50) та теоретичної ймовірності (0,62) прибуття транзитного поїзда пояснюється недостатньою кількістю виконаних дослідів при моделюванні ($n = 50$); зі збільшенням кількості дослідів статистична ймовірність поступово буде наближатися до теоретичного значення.

Моделювання інтервалів прибуття поїздів. Інтервали прибуття поїздів до приймально-відправного парку являють собою ВВ *T*, що розподілена за законом Ерланга. Для графічного моделювання інтервалів прибуття поїздів побудуємо графік інтегральної функції розподілу відповідної випадкової величини. Інтегральна функція розподілу випадкової величини інтервалів прибуття поїздів (12.1) при $k = 1$ має вигляд $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ (12.2). Інтенсивність вхідного потоку поїздів λ розраховується за формулою $\lambda = 1/M[T]$. Визначимо математичне сподівання інтервалів прибуття поїздів на станцію:

$$M[T] = 1\,440/(15 + 19 + 16) = 28{,}8 \text{ хв.}$$

За формулою (12.2) розраховуються значення інтегральної функції розподілу $F(t)$, наприклад з кроком 10 хв; при $k = 2$ розрахунок здійснюється за виразом (12.3). Значення F(t) для $k = 1$ та $k = 2$ наведені в табл. 12.3.

Таблиця 12.3

Значення функції розподілу $F(t)$ інтервалів прибуття поїздів

t, хв													
0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130
$k = 1$													
0,000	0,293	0,501	0,647	0,751	0,824	0,875	0,912	0,938	0,956	0,969	0,978	0,984	0,990
$k = 2$													
0,000	0,154	0,404	0,616	0,765	0,861	0,920	0,955	0,975	0,986	0,992	–	–	–

За даними табл. 12.3 будується графік інтегральної функції розподілу випадкової величини інтервалу прибуття (рис. 12.7).

Для моделювання інтервалів прибуття використовуються випадкові числа, що рівномірно розподілені в інтервалі [0; 1]. Приклад моделювання для числа $R_i = 0{,}27$ наведено на рис. 12.7. Моделювання інтервалів прибуття 50 поїздів зведено в табл. 12.4; у кожній клітині цієї таблиці в чисельнику записане випадкове число R_i, а в знаменнику – відповідний інтервал між поїздами t_i.

Слід зазначити, що при реалізації імітаційної моделі парку на ЕОМ інтервали прибуття поїздів моделюються за виразами (12.5) або (12.6).

Моделювання тривалості обслуговування поїздів у парку. Кількість вагонів m у поїзді є дискретною ВВ, що рівномірно розподілена в інтервалі [48; 62] ваг. і відповідно моделюється за виразом (12.11). Для прикладу, визначимо кількість вагонів у поїзді № 1 $\left(R_1 = 0{,}65\right)$:

$$m_1 = 48 + \left\lfloor (62 - 48 + 1) 0{,}65 \right\rfloor = 48 + \left\lfloor 9{,}75 \right\rfloor = 48 + 9 = 57 \text{ ваг.}$$

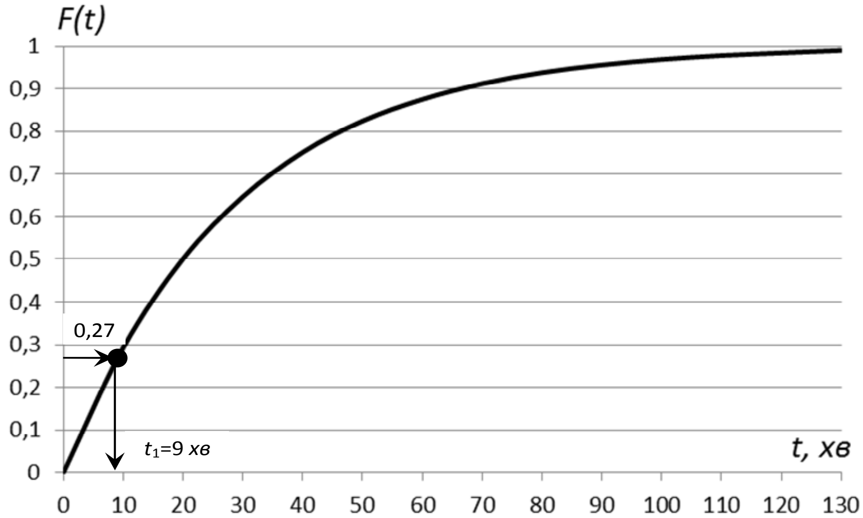


Рис. 12.7. Графічне моделювання випадкової величини інтервалів прибуття

Таблиця 12.4

Результати моделювання інтервалів прибуття поїздів

$\frac{0{,}60}{26}$	$\frac{0{,}18}{6}$	$\frac{0{,}27}{9}$	$\frac{0{,}44}{17}$	$\frac{0{,}54}{22}$	$\frac{0{,}77}{42}$	$\frac{0{,}27}{9}$	$\frac{0{,}73}{38}$	$\frac{0{,}81}{48}$	$\frac{0{,}39}{14}$
$\frac{0{,}27}{9}$	$\frac{0{,}57}{24}$	$\frac{0{,}30}{10}$	$\frac{0{,}87}{59}$	$\frac{0{,}20}{6}$	$\frac{0{,}86}{57}$	$\frac{0{,}29}{10}$	$\frac{0{,}99}{130}$	$\frac{0{,}06}{2}$	$\frac{0{,}03}{1}$
$\frac{0{,}45}{17}$	$\frac{0{,}26}{9}$	$\frac{0{,}29}{10}$	$\frac{0{,}89}{64}$	$\frac{0{,}63}{29}$	$\frac{0{,}88}{61}$	$\frac{0{,}56}{24}$	$\frac{0{,}16}{5}$	$\frac{0{,}07}{2}$	$\frac{0{,}01}{0}$
$\frac{0{,}15}{3}$	$\frac{0{,}36}{13}$	$\frac{0{,}86}{57}$	$\frac{0{,}88}{61}$	$\frac{0{,}85}{55}$	$\frac{0{,}80}{46}$	$\frac{0{,}44}{17}$	$\frac{0{,}17}{5}$	$\frac{0{,}58}{25}$	$\frac{0{,}70}{35}$
$\frac{0{,}33}{12}$	$\frac{0{,}84}{53}$	$\frac{0{,}36}{13}$	$\frac{0{,}82}{49}$	$\frac{0{,}26}{9}$	$\frac{0{,}41}{15}$	$\frac{0{,}12}{4}$	$\frac{0{,}08}{2}$	$\frac{0{,}56}{24}$	$\frac{0{,}21}{7}$

Тривалість технічного огляду состава визначається за формулою

$$t_{\text{ТО}} = \left(\tau_{\text{в}} m\right) / K_{\text{гр}} ,$$

де $\tau_{\text{в}}$ – середня тривалість технічного огляду одного вагона в составі, хв;

$K_{\text{гр}}$ – кількість груп у бригаді ПТО, $K_{\text{гр}} = 3$.

Тривалість технічного огляду одного вагона в составі є неперервною ВВ з нормальним розподілом і, відповідно, моделюється за виразом (12.8). При моделюванні використовуються нормально розподілені випадкові числа Z_i, що можуть бути визначені за виразом (12.9). Визначимо тривалість огляду одного вагона в поїзді № 1 $\left(Z_1 = 0{,}96\right)$: $\tau_{\text{в}1} = 1{,}10 + 0{,}23 \cdot 0{,}96 = 1{,}32$ хв.

Таким чином, $t_{\text{ТО}1} = \left(1{,}32 \cdot 57\right)/3 = 25{,}1$ хв.

Загальний час обслуговування поїзда в парку визначається як

$$T_{\text{обсл}} = t_{\text{ТО}} + t_{\text{дод}} ,$$

де $t_{\text{дод}}$ – тривалість додаткової операцій, що залежно від категорії поїзда є операцією відправлення або розформування, хв.

Згідно з табл. 12.2 перший поїзд прибув у парк сортувальної станції для розформування, тому $t_{\text{дод}} = 12$ хв.

Таким чином: $T_{\text{обсл}1} = 25{,}1 + 12{,}0 = 37{,}1$ хв.

Моделювання тривалості обслуговування 50 поїздів у приймально-відправному парку виконано в табл. 12.5.

Таблиця 12.5

Моделювання тривалості обслуговування поїздів у парку

№ пор.	Катег.	R_i	m_i, ваг.	Z_i	$\tau_{\text{в}i}$, хв	$t_{\text{ТО}i}$, хв	$t_{\text{дод}i}$, хв	$T_{\text{обсл}i}$, хв
1	*P*	0,65	57	0,96	1,32	25,1	12	37,1
2	*P*	0,93	61	0,91	1,31	26,6	12	38,6
3	*T*	0,41	54	0,21	1,15	20,7	8	28,7
4	*P*	0,21	51	0,41	1,19	20,3	12	32,3
5	*T*	0,58	56	–0,70	0,94	17,5	8	25,5
6	*P*	0,62	57	–0,92	0,89	16,9	12	28,9
7	*T*	0,34	53	–2,01	0,64	11,3	8	19,3
8	*P*	0,40	54	1,25	1,39	25,0	12	37,0
9	*P*	0,18	50	0,18	1,14	19,0	12	31,0

№ пор.	Катег.	R_i	m_i, ваг.	Z_i	$\tau_{\text{в}i}$, хв	$t_{\text{ТО}i}$, хв	$t_{\text{дод}i}$, хв	$T_{\text{обсл}i}$, хв
10	*Р*	0,59	56	1,16	1,37	25,5	12	37,5
11	*Р*	0,06	48	1,44	1,43	22,9	12	34,9
12	*Т*	0,84	60	0,38	1,19	23,7	8	31,7
13	*Т*	0,49	55	–0,78	0,92	16,9	8	24,9
14	*Р*	0,60	57	–1,14	0,84	15,9	12	27,9
15	*Т*	0,43	54	–1,19	0,83	14,9	8	22,9
16	*Т*	0,85	60	–0,20	1,05	21,1	8	29,1
17	*Т*	0,93	61	0,10	1,12	22,8	8	30,8
18	*Р*	0,21	51	–0,76	0,93	15,7	12	27,7
19	*Р*	0,30	52	1,01	1,33	23,1	12	35,1
20	*Т*	0,99	62	1,45	1,43	29,6	8	37,6
21	*Т*	0,47	55	0,77	1,28	23,4	8	31,4
22	*Р*	0,01	48	0,96	1,32	21,1	12	33,1
23	*Р*	0,53	55	0,85	1,30	23,8	12	35,8
24	*Т*	0,74	59	0,50	1,22	23,9	8	31,9
25	*Т*	0,04	48	–0,29	1,03	16,5	8	24,5
26	*Т*	0,44	54	–0,49	0,99	17,8	8	25,8
27	*Т*	0,16	50	0,28	1,16	19,4	8	27,4
28	*Р*	0,07	49	1,57	1,46	23,9	12	35,9
29	*Т*	0,60	57	0,18	1,14	21,7	8	29,7
30	*Р*	0,22	51	–0,53	0,98	16,6	12	28,6
31	*Т*	0,86	60	–0,32	1,03	20,5	8	28,5
32	*Р*	0,37	53	0,03	1,11	19,6	12	31,6
33	*Р*	0,34	53	–0,55	0,97	17,2	12	29,2
34	*Р*	0,73	58	–0,24	1,04	20,2	12	32,2
35	*Р*	0,05	48	0,05	1,11	17,8	12	29,8
36	*Т*	0,24	51	0,17	1,14	19,4	8	27,4

Закінчення табл. 12.5

№ пор.	Катег.	R_i	m_i, ваг.	Z_i	$\tau_{\text{в}i}$, хв	$t_{\text{ТО}i}$, хв	$t_{\text{дод}i}$, хв	$T_{\text{обсл}i}$, хв
37	*P*	0,65	57	0,10	1,12	21,3	12	33,3
38	*P*	0,83	60	–0,10	1,08	21,5	12	33,5
39	*T*	0,08	49	–0,69	0,94	15,4	8	23,4
40	*T*	0,33	52	1,53	1,45	25,2	8	33,2
41	*T*	0,87	61	0,19	1,14	23,3	8	31,3
42	*P*	0,01	48	–0,76	0,93	14,8	12	26,8
43	*T*	0,71	58	–1,47	0,76	14,7	8	22,7
44	*P*	0,08	49	1,09	1,35	22,1	12	34,1
45	*P*	0,26	51	0,61	1,24	21,1	12	33,1
46	*P*	0,73	58	0,21	1,15	22,2	12	34,2
47	*T*	0,61	57	–0,81	0,91	17,4	8	25,4
48	*T*	0,20	51	0,56	1,23	20,9	8	28,9
49	*T*	0,24	51	0,24	1,16	19,6	8	27,6
50	*T*	0,58	56	–1,39	0,78	14,6	8	22,6

Моделювання роботи приймально-відправного парку. Для моделювання роботи приймально-відправного парку необхідно встановити основні моменти виконання технологічного процесу обслуговування кожного поїзда, а саме: момент прибуття *T*, початок *B* та кінець *F* технічного огляду, момент звільнення колії *D*, а також простій поїзда в очікуванні обслуговування *P* і простій бригади в очікуванні поїзда *W*.

Категорія кожного поїзда визначається згідно з табл. 12.2.

Момент прибуття поїзда визначається за формулою:

$$T_{i+1} = T_i + t_i,\ i = 1, 2, 3, ..., n-1,\ T_1 = 0,$$

де t_i – інтервал між моментами прибуття *i*-го та $(i+1)$-го поїздів, хв (значення t_i приймаються згідно з табл. 12.4);

n – кількість поїздів, що обробляються в парку за період моделювання ($n = 50$).

Момент початку обслуговування B_i визначається як:

$$B_i = \begin{cases} T_i, \text{ якщо } T_i \geq F_{i-1}, \\ F_{i-1}, \text{ якщо } T_i < F_{i-1}, \end{cases} \quad i = 2, 3, 4, ..., n, \ B_1 = 0 .$$

Моменти закінчення технічного огляду F_i та звільнення колії D_i:

$$F_i = B_i + t_{\text{ТО}i}, \ \ i = 1, 2, 3, ..., n ,$$

$$D_i = F_i + t_{\text{дод}i}, \ \ i = 1, 2, 3, ..., n ,$$

де $t_{\text{ТО}i}$, $t_{\text{дод}i}$ – відповідно тривалість технічного огляду та додаткових операцій з відправлення або розформування поїзда, хв (значення $t_{\text{ТО}i}$ та $t_{\text{дод}i}$ приймаються згідно з табл. 12.5).

Простій поїзда в очікуванні бригади та простій бригади в очікуванні прибуття поїзда визначаються відповідно за формулами

$$P_i = B_i - T_i, \ \ i = 2, 3, 4, ..., n ,$$

$$W_i = B_i - F_{i-1}, \ \ i = 2, 3, 4, ..., n .$$

Моделювання роботи приймально-відправного парку виконується в табличній формі (табл. 12.6).

Таблиця 12.6

Моделювання роботи приймально-відправного парку

№ пор.	Катег.	t, хв	$t_{\text{ТО}}$, хв	T, хв	B, хв	F, хв	$t_{\text{дод}}$, хв	D, хв	P, хв	W, хв
1	*P*	9	25,1	0	0,0	25,1	12	37,1	0,0	0,0
2	*P*	6	26,6	9	25,1	51,7	12	63,7	16,1	0,0
3	*T*	26	20,7	15	51,7	72,4	8	80,4	36,7	0,0
4	*P*	17	20,3	41	72,4	92,7	12	104,7	31,4	0,0
5	*T*	22	17,5	58	92,7	110,2	8	118,2	34,7	0,0
6	*P*	42	16,9	80	110,2	127,1	12	139,1	30,2	0,0
7	*T*	9	11,3	122	127,1	138,4	8	146,4	5,1	0,0
8	*P*	38	25,0	131	138,4	163,3	12	175,3	7,4	0,0
9	*P*	48	19,0	169	169,0	188,0	12	200,0	0,0	5,7

Продовження табл. 12.6

№ пор.	Катег.	t, хв	$t_{ТО}$, хв	T, хв	B, хв	F, хв	$t_{дод}$, хв	D, хв	P, хв	W, хв
10	P	14	25,5	217	217,0	242,5	12	254,5	0,0	29,0
11	P	9	22,9	231	242,5	265,4	12	277,4	11,5	0,0
12	T	24	23,7	240	265,4	289,2	8	297,2	25,4	0,0
13	T	10	16,9	264	289,2	306,0	8	314,0	25,2	0,0
14	P	59	15,9	274	306,0	322,0	12	334,0	32,0	0,0
15	T	6	14,9	333	333,0	347,9	8	355,9	0,0	11,0
16	T	57	21,1	339	347,9	369,0	8	377,0	8,9	0,0
17	T	10	22,8	396	396,0	418,8	8	426,8	0,0	27,0
18	P	130	15,7	406	418,8	434,6	12	446,6	12,8	0,0
19	P	2	23,1	536	536,0	559,1	12	571,1	0,0	101,4
20	T	1	29,6	538	559,1	588,7	8	596,7	21,1	0,0
21	T	17	23,4	539	588,7	612,1	8	620,1	49,7	0,0
22	P	9	21,1	556	612,1	633,3	12	645,3	56,1	0,0
23	P	10	23,8	565	633,3	657,0	12	669,0	68,3	0,0
24	T	64	23,9	575	657,0	680,9	8	688,9	82,0	0,0
25	T	29	16,5	639	680,9	697,4	8	705,4	41,9	0,0
26	T	61	17,8	668	697,4	715,2	8	723,2	29,4	0,0
27	T	24	19,4	729	729,0	748,4	8	756,4	0,0	13,8
28	P	5	23,9	753	753,0	776,9	12	788,9	0,0	4,6
29	T	2	21,7	758	776,9	798,6	8	806,6	18,9	0,0
30	P	0	16,6	760	798,6	815,2	12	827,2	38,6	0,0
31	T	5	20,5	760	815,2	835,7	8	843,7	55,2	0,0
32	P	13	19,6	765	835,7	855,3	12	867,3	70,7	0,0
33	P	57	17,2	778	855,3	872,5	12	884,5	77,3	0,0
34	P	61	20,2	835	872,5	892,7	12	904,7	37,5	0,0
35	P	55	17,8	896	896,0	913,8	12	925,8	0,0	3,3
36	T	46	19,4	951	951,0	970,4	8	978,4	0,0	37,2

№ пор.	Катег.	t, хв	$t_{ТО}$, хв	T, хв	B, хв	F, хв	$t_{дод}$, хв	D, хв	P, хв	W, хв
37	*P*	17	21,3	997	997,0	1 018,3	12	1 030,3	0,0	26,6
38	*P*	5	21,5	1 014	1 018,3	1 039,9	12	1 051,9	4,3	0,0
39	*T*	25	15,4	1 019	1 039,9	1 055,3	8	1 063,3	20,9	0,0
40	*T*	35	25,2	1 044	1 055,3	1 080,4	8	1 088,4	11,3	0,0
41	*T*	12	23,3	1 079	1 080,4	1 103,7	8	1 111,7	1,4	0,0
42	*P*	53	14,8	1 091	1 103,7	1 118,5	12	1 130,5	12,7	0,0
43	*T*	13	14,7	1 144	1 144,0	1 158,7	8	1 166,7	0,0	25,5
44	*P*	49	22,1	1 157	1 158,7	1 180,8	12	1 192,8	1,7	0,0
45	*P*	9	21,1	1 206	1 206,0	1 227,1	12	1 239,1	0,0	25,2
46	*P*	15	22,2	1 215	1 227,1	1 249,3	12	1 261,3	12,1	0,0
47	*T*	4	17,4	1 230	1 249,3	1 266,6	8	1 274,6	19,3	0,0
48	*T*	2	20,9	1 234	1 266,6	1 287,5	8	1 295,5	32,6	0,0
49	*T*	24	19,6	1 236	1 287,5	1 307,2	8	1 315,2	51,5	0,0
50	*T*	–	14,6	1 260	1 307,2	1 321,7	8	1 329,7	47,2	0,0
Разом	–	1 260	1 011,3	–	–	–	500,0	–	1 139,0	310,5

За результатами моделювання можна побудувати графік роботи приймально-відправного парку, фрагмент якого наведено на рис. 12.8.

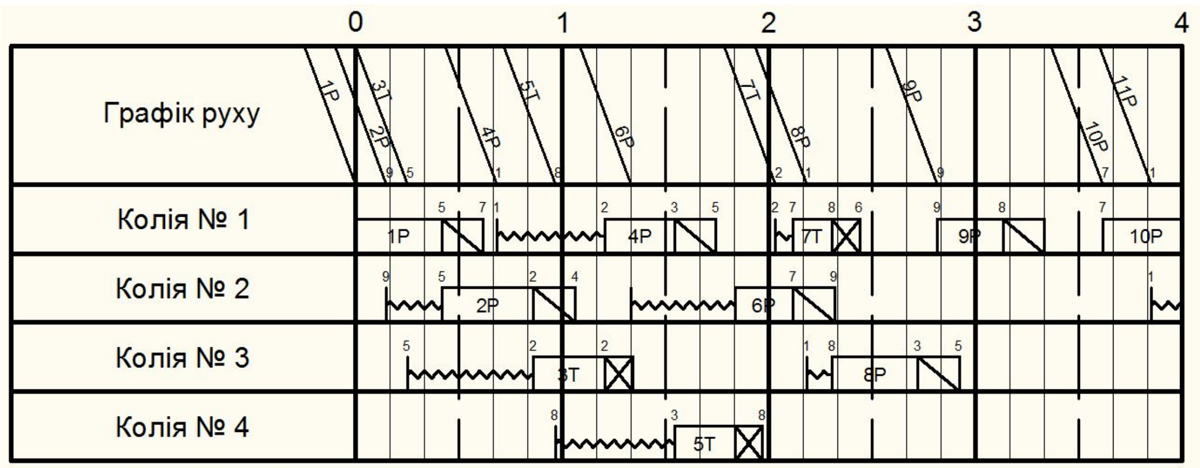


Рис. 12.8. Фрагмент графіка роботи приймально-відправного парку

Визначення показників роботи приймально-відправного парку за результатами моделювання. Середня тривалість технічного огляду та середня тривалість обслуговування поїзда в парку визначаються відповідно за формулами

$$\overline{t}_{\text{ТО}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\tau_{\text{ТО}i}}{n}, \quad \overline{T}_{\text{обсл}} = \overline{t}_{\text{ТО}} + \sum_{i=1}^{n} \frac{t_{\text{дод}i}}{n}.$$

Середній інтервал прибуття визначається як

$$\overline{t} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{t_i}{n-1}.$$

Середня тривалість очікування обслуговування поїзда та середній простій бригади в очікуванні поїзда визначаються відповідно за формулами

$$\overline{P} = \sum_{i=2}^{n} \frac{P_i}{n-1}, \quad \overline{W} = \sum_{i=2}^{n} \frac{W_i}{n-1}$$

Завантаження бригади ПТО: $\psi = \overline{t}_{\text{ТО}} / \overline{t}$.

Середня тривалість зайняття колії поїздом визначається за формулою:

$$\overline{T}_{\text{зайн}} = \overline{T}_{\text{обсл}} + \overline{P}.$$

Середня кількість зайнятих колій у парку визначається як $\overline{M} = \overline{T}_{\text{зайн}} / \overline{t}$.

Максимальна кількість зайнятих колій $M_{\max}$ визначається за графіком роботи приймально-відправного парку. При цьому необхідна кількість колій у парку може бути приблизно розрахована за формулою:

$$M = \left(\overline{M} + M_{\max} \right) / 2.$$

За наведеними формулами та даними табл. 12.6 визначимо показники роботи приймально-відправного парку:

– середня тривалість технічного огляду поїзда: $\overline{t}_{\text{ТО}} = 1\,011{,}3/50 = 20{,}2$ хв;
– середня тривалість обслуговування поїзда: $\overline{T}_{\text{обсл}} = 20{,}2 + (500/50) = 30{,}2$ хв;
– середній інтервал прибуття поїздів: $\overline{t} = 1\,260{,}0/49 = 25{,}7$ хв;
– середній простій поїзда в очікуванні обробки: $\overline{P} = 1\,339{,}0/49 = 23{,}3$ хв;
– середній простій бригади в очікуванні поїзда $\overline{W} = 310{,}5/49 = 6{,}3$ хв;
– середня тривалість зайняття поїздом колії $\overline{T}_{\text{зайн}} = 30{,}2 + 23{,}3 = 53{,}5$ хв;
– завантаження бригади ПТО $\psi = 20{,}2/25{,}7 = 0{,}79$;
– середня кількість зайнятих колій у парку $\overline{M} = 53{,}5/25{,}7 = 2{,}1$.

12.4. Приклади розв'язання задач імітаційного моделювання при дослідженні транспортних процесів

12.4.1. Моделювання маси вагонів

Умова задачі. Навантаження на вісь вагона q є випадковою величиною, що розподілена за нормальним законом з параметрами: математичне сподівання $M\left[q\right]=14$ т/вісь, середнє квадратичне відхилення $\sigma\left[q\right]=3$ т/вісь. Кількість осей n у вагоні є ВВ, що задана статистичним рядом (табл. 12.7).

Таблиця 12.7

Статистичний ряд розподілу кількості осей у вагоні

n	4	6	8
p	0,80	0,05	0,15

Необхідно виконати моделювання маси 10 вагонів та визначити середнє значення маси вагона.

Розв'язання. Маса i-го вагона визначається за формулою

$$Q_i = n_i q_i .$$

Моделювання кількості осей n_i у кожному i-му вагоні виконаємо за принципом моделювання повної групи несумісних подій (див. п. 12.2.2?). Для цього побудуємо одиничний відрізок (рис. 12.9), який розіб'ємо на три ділянки довжиною відповідно до даних табл. 12.7.

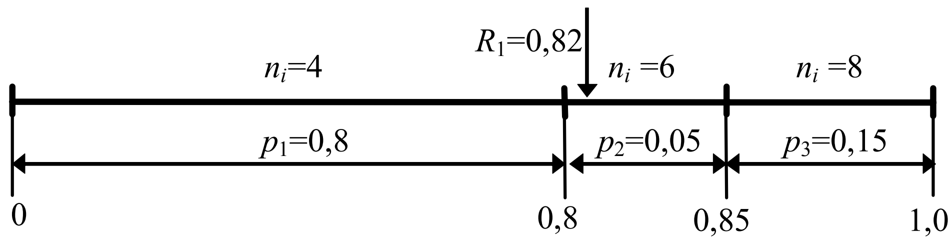


Рис. 12.9. Одиничний відрізок для моделювання кількості осей у вагоні

Відкладемо на одиничному відрізку випадкове число R_i [0; 1] – кількість осей в i-му вагоні визначається залежно від ділянки, на яку потрапило число R_i. Оскільки $R_1 = 0,82$, то в першому вагоні 6 осей (рис. 12.9).

Навантаження на вісь q_i i-го вагону є неперервною ВВ, що розподілена за нормальним законом та моделюється за виразом (12.8); при цьому використовуються випадкові числа Z_i (12.9). Наприклад, для першого вагона $(Z_1 = -1{,}98)$: $q_1 = 14 + 3(-1{,}98) = 8{,}06$ т/вісь.

Отже, маса першого вагона становить $Q_1 = 6 \cdot 8{,}06 = 48{,}36$ т.

Моделювання маси для 10 вагонів виконаємо в табл. 12.8.

Таблиця 12.8

Моделювання маси вагонів

i	R_i	n_i	Z_i	q_i, т/вісь	Q_i, т
1	0,82	6	–1,98	8,06	48,36
2	0,13	4	0,36	15,08	60,32
3	0,87	8	1,18	17,54	140,32
4	0,59	4	2,75	22,25	89,00
5	0,77	4	–0,14	13,58	54,32
6	0,93	8	–0,39	12,83	102,64
7	0,12	4	–0,92	11,24	44,96
8	0,34	4	1,12	17,36	69,44
9	0,45	4	0,56	15,68	62,72
10	0,76	4	–0,15	13,55	54,20
Разом					726,28

Отже, середнє значення маси вагона становить $Q_{\text{сер}} = 726{,}28/10 = 72{,}6$ т.

12.4.2. Моделювання маси контейнерів

Умова задачі. Під навантаження подають 20-футові та 40-футові контейнери. У середньому за добу навантажується 30 20-футових контейнерів та 20 40-футових. Коефіцієнт використання вантажопідйомності контейнера $K_з$ являє собою випадкову величину, що рівномірно розподілена в інтервалі [0,2; 1]. Вантажопідйомність 20-футового контейнера $q_{20} = 18$ т, 40-футового – $q_{40} = 26$ т. Виконати моделювання навантаження 10 контейнерів та визначити ймовірність того, що маса вантажу в контейнері буде не менше половини його вантажопідйомності.

Розв'язання. Маса вантажу в i-му контейнері може бути визначена як

$$Q_i = K_{зi} q_i .$$

Коефіцієнт завантаження контейнера є неперервною ВВ, яка рівномірно розподілена в інтервалі [0,2; 1] та моделюється за виразом (12.10) з використанням випадкових чисел R_i [0; 1]. Наприклад, для першого контейнера $\left(R_1 = 0,28\right)$ маємо: $K_{з1} = 0,2 + \left(1 - 0,2\right)0,28 = 0,424$.

Вантажопідйомність контейнера q_i визначається його типом: 20-футовий чи 40-футовий. Тип контейнера можна промоделювати як випадкову величину з відомою ймовірністю (див. 12.2.2). Визначимо ймовірність подачі під навантаження 20-футового контейнера за формулою (12.1): $P\left(20\right) = 30 / \left(30 + 20\right) = 0,6$. Моделювання виконаємо аналітичним способом з використанням випадкових чисел R_i [0; 1]: якщо випадкове число $R_i < P\left(20\right)$, то i-й контейнер 20-футовий, інакше – 40-футовий. Наприклад, для першого контейнера $R_1 = 0,78$, тобто цей контейнер 40-футовий та має вантажопідйомність 26 т. Визначимо масу вантажу в першому контейнері: $Q_1 = 0,424 \cdot 26 = 11,02$ т $< 26/2$.

Моделювання маси вантажу в 10 контейнерах наведено в табл. 12.9.

Таблиця 12.9

Моделювання маси вантажу в контейнерах

i	R_1	$K_з$	R_2	Тип	q, т	Q, т	$Q \geq q/2$
1	0,28	0,424	0,78	40	26	11,02	0
2	0,47	0,576	0,15	20	18	10,37	1
3	0,58	0,664	0,24	20	18	11,95	1
4	0,07	0,256	0,96	40	26	6,66	0
5	0,95	0,960	0,61	40	18	17,28	1
6	0,84	0,872	0,42	20	18	15,70	1
7	0,21	0,368	0,17	20	18	6,62	0
8	0,13	0,304	0,67	40	26	7,90	0
9	0,77	0,816	0,55	20	18	14,69	1
10	0,63	0,704	0,38	20	18	12,67	1

Згідно з табл. 12.9 у шести контейнерах маса вантажу перевищує половину вантажопідйомності; отже, ймовірність цієї події становить 0,6.

12.4.3. Моделювання порядку розташування вагонів

Умова задачі. На колії стоїть група з $M = 8$ порожніх вагонів. Відомо, що кількість несправних вагонів у групі N є ВВ, що рівномірно розподілена в інтервалі [2; 5]. Оглядач вагонів по черзі перевіряє технічний стан кожного вагона та вибирає під навантаження 3 справних вагони, після чого огляд закінчується. Тривалість огляду кожного вагона T (з урахуванням проходу вздовж состава) є ВВ, яка розподілена за нормальним законом з параметрами $M\left[T\right]=1,8$ хв, $\sigma\left[T\right]=0,3$ хв. Виконати моделювання розташування та вибору справних вагонів для 5 груп. Визначити середню тривалість вибору необхідної групи справних вагонів.

Розв'язання. Кількість несправних вагонів у групі, що стоїть на колії, є дискретною ВВ, що рівномірно розподілена в інтервалі [2; 5] та моделюється за виразом (12.11); при цьому використовуються випадкові числа R_i [0; 1]. Наприклад, для першої групи $\left(R_1 = 0,67\right)$ маємо:

$$N_1 = 2 + \left\lfloor \left(5 - 2 + 1\right) 0,67 \right\rfloor = 2 + \left\lfloor 2,68 \right\rfloor = 2 + 2 = 4 \text{ ваг.}$$

Моделювання розташування несправних та справних порожніх вагонів у групі виконується за принципом випадкової суміші (див. п. 12.2.2). Для першого вагона ймовірність того, що він несправний, становить $P\left(\text{Н}\right)_1 = N_1 / M = 4/8 = 0,50$. Якщо випадкове число $R_i\left[0;1\right] < P\left(\text{Н}\right)_1$, то перший вагон є несправним (Н), інакше – справним (С). Для другого вагона ймовірність $P\left(\text{Н}\right)_2$ перераховується з урахуванням результатів для першого вагона і т. д. За умовами задачі моделювання справності вагонів виконується до тих пір, поки не буде вибрано 3 справних вагони. Для прикладу розглянемо послідовність випадкових чисел: 0,78; 0,33; 0,56; 0,27; 0,42; 0,96; 0,08; 0,63 для моделювання першої групи вагонів.

Оскільки $R_1 = 0,78 > 0,50$, то 1-й вагон є справним (С); для другого вагона кількість несправних вагонів залишилася рівною 4, а загальна кількість вагонів зменшилась на один; отже, $P\left(\text{Н}\right)_2 = 4/\left(8-1\right) = 0,57$. Оскільки $R_2 = 0,33 < 0,57$, то другий вагон є несправним (Н). Далі маємо:

- 3-й вагон: $P\left(\text{Н}\right)_3 = 3/\left(8-2\right) = 0,50$, $R_3 = 0,56 > 0,50$ – справний;
- 4-й вагон: $P\left(\text{Н}\right)_4 = 3/\left(8-3\right) = 0,60$, $R_4 = 0,27 < 0,60$ – несправний;
- 5-й вагон: $P\left(\text{Н}\right)_5 = 2/\left(8-4\right) = 0,50$, $R_5 = 0,42 < 0,50$ – несправний;
- 6-й вагон: $P\left(\text{Н}\right)_6 = 1/\left(8-5\right) = 0,33$, $R_6 = 0,96 < 0,50$ – справний.

Оскільки після огляду 6-го вагона вибрано 3 справних вагони (1-й, 3-й та 6-й), то подальший огляд припиняється; при цьому загальна кількість оглянутих вагонів першої групи становить $K_1 = 6$.

Тривалість огляду одного вагона T є випадковою величиною, що розподілена за нормальним законом та моделюється за виразом (12.8); при цьому використовуються випадкові числа Z_i (12.9). Наприклад, для першого вагона першої групи $\left(Z_1 = 1,27\right)$: $T_{11} = 1,8 + 0,3 \cdot 1,27 = 2,18$ хв. Аналогічно розраховуються тривалості огляду всіх шести вагонів першої групи та визначаємо загальну тривалість вибору справних вагонів у першій групі.

Моделювання вибору справних вагонів у 10 групах виконано в табл. 12.10.

Середня тривалість вибору трьох справних вагонів складає:

$$T_{\text{огл(сер)}} = \left(11,60 + 5,90 + 15,35 + 10,86 + 8,66\right)/5 = 10,47 \text{ хв.}$$

12.4.4. Моделювання штрафу за безквитковий проїзд

Умова задачі. Кількість пасажирів N у вагоні 10-вагонного електропоїзда є випадковою величиною, що рівномірно розподілена в інтервалі [5, 15]. Кількість пасажирів K, які не мають квитка, є випадковою величиною, що розподілена за біноміальним законом. Ймовірність того, що пасажир не має квитка, $P\left(\text{Н}\right) = 0,4$. Унаслідок безквиткового проїзду одного пасажира залізниця зазнає збитків у розмірі 50 гривень. Виконати моделювання загальної кількості та кількості безквиткових пасажирів у електропоїзді й визначити ймовірність того, що сума збитків залізниці по одному вагону перевищить 200 гривень.

Розв'язання. Загальна кількість пасажирів N у вагоні є дискретною ВВ, яка рівномірно розподілена в інтервалі [5, 15] та моделюється за виразом (12.11). Наприклад, для першого вагона (при $R_1 = 0,18$) маємо: $N_1 = 5 + \left\lfloor \left(15 - 5 + 1\right) 0,22 \right\rfloor = 5 + \left\lfloor 2,42 \right\rfloor = 5 + 2 = 7$ пасажирів.

Кількість безквиткових пасажирів K є дискретною ВВ, що має біноміальний розподіл та моделюється за виразом (12.12). При цьому по кожному з пасажирів вагона перевіряється умова $R_i < P(\text{Н})$: якщо ця умова справедлива, то вважаємо, що i-й пасажир не має квитка (Н), інакше – з квитком (К). Наприклад, для першого вагона, у якому 6 пасажирів, маємо:

– 1-й пасажир: $R_{11} = 0,29 < 0,4$ – не має квитка (Н);
– 2-й пасажир: $R_{12} = 0,15 < 0,4$ – не має квитка (Н);
– 3-й пасажир: $R_{13} = 0,69 > 0,4$ – має квиток (К);
– 4-й пасажир: $R_{14} = 0,35 < 0,4$ – не має квитка (Н);
– 5-й пасажир: $R_{15} = 0,54 > 0,4$ – має квиток (К);
– 6-й пасажир: $R_{16} = 0,85 > 0,4$ – має квиток (К).
– 7-й пасажир: $R_{17} = 0,4 = 0,4$ – має квиток (К).

Отже, у першому вагоні 3 пасажири не мають квитків; при цьому залізниця несе збитки у розмірі $B_1 = 3 \cdot 50 = 150$ грн, що не перевищує задану величину.

Моделювання для 10-вагонного електропоїзда виконано в табл. 12.11.

Таблиця 12.10

Моделювання вибору справних вагонів

№ гр.	R	N, ваг.	Пара-метри	Вагони								$T_{огл}$, хв
				1	2	3	4	5	6	7	8	
1	0,67	4	$P(\text{Н})$	$4/8=0,50$	$7/7=0,57$	$3/6=0,50$	$3/5=0,60$	$2/4=0,50$	$1/3=0,33$	–	–	11,60
			R	0,78	0,33	0,56	0,27	0,42	0,96	–	–	
			Н/С	С	Н	С	Н	Н	С	–	–	
			Z	1,27	0,88	–0,63	2,05	–1,56	0,65	–	–	
			T, хв	2,18	2,06	1,61	2,42	1,33	2,00	–	–	
2	0,28	3	$P(\text{Н})$	$3/8=0,38$	$3/7=0,43$	$3/6=0,50$	–	–	–	–	–	5,90
			R	0,69	0,44	0,92	–	–	–	–	–	
			Н/С	С	С	С	–	–	–	–	–	
			Z	–0,15	0,87	0,96	–	–	–	–	–	
			T, хв	1,76	2,06	2,09	–	–	–	–	–	
3	0,95	5	$P(\text{Н})$	$5/8=0,63$	$4/7=0,57$	$3/6=0,50$	$2/5=0,40$	$2/4=0,50$	$1/3=0,33$	0,00	0,00	15,35
			R	0,56	0,15	0,06	0,68	0,49	0,03	0,15	0,94	
			Н/С	Н	Н	Н	С	Н	Н	С	С	
			Z	1,83	–0,55	1,08	0,64	0,25	0,88	–0,82	–0,16	
			T, хв	2,35	1,64	2,12	1,99	1,88	2,06	1,55	1,75	

Закінчення табл. 12.10

№ гр.	R	N, ваг.	Пара-метри	Вагони								$T_{огл}$, хв
				1	2	3	4	5	6	7	8	
4	0,55	4	$P(\text{Н})$	$4/8=0,50$	$3/7=0,43$	$3/6=0,50$	$2/5=0,40$	$1/4=0,25$	$1/3=0,33$	–	–	10,86
			R	0,24	0,88	0,46	0,36	0,29	0,94	–	–	
			Н/С	Н	С	Н	Н	С	С	–	–	
			Z	2,15	0,78	–0,67	0,27	–0,78	–1,54	–	–	
			T, хв	2,45	2,03	1,60	1,88	1,57	1,34	–	–	
5	0,18	2	$P(\text{Н})$	$2/8=0,25$	$1/7=0,14$	0,00	0,00	0,00	–	–	–	8,66
			R	0,17	0,07	0,91	0,14	0,66	–	–	–	
			Н/С	Н	Н	С	С	С	–	–	–	
			Z	–0,95	1,23	0,56	–1,74	–0,24	–	–	–	
			T, хв	1,52	2,17	1,97	1,28	1,73	–	–	–	

Таблиця 12.11

Моделювання кількості безквиткових пасажирів

№ ваг.	*R*	*N*, пас.	Пасажири															*K*, пас.	*B*, грн	*B* > 200
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15			
1	0,22	7	0,29	0,15	0,69	0,35	0,54	0,85	0,40	–	–	–	–	–	–	–	–	3	150	0
			Н	Н	К	Н	К	К	К	–	–	–	–	–	–	–	–			
2	0,75	13	0,17	0,59	0,36	0,87	0,92	0,38	0,63	0,48	0,68	0,05	0,27	0,39	0,55	–	–	6	300	1
			Н	К	Н	К	К	Н	К	К	К	Н	Н	Н	К	–	–			
3	0,06	5	0,58	0,33	0,12	0,88	0,72	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	2	100	0
			К	Н	Н	К	К	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–			
4	0,92	15	0,36	0,82	0,41	0,65	0,57	0,23	0,03	0,15	0,87	0,36	0,28	0,96	0,06	0,30	0,49	8	400	1
			Н	К	К	К	К	Н	Н	Н	К	Н	Н	К	Н	Н	К			
5	0,37	9	0,60	0,12	0,17	0,69	0,04	0,84	0,71	0,66	0,14	–	–	–	–	–	–	4	200	0
			К	Н	Н	К	Н	Н	Н	Н	Н	–	–	–	–	–	–			
6	0,46	10	0,29	0,69	0,77	0,88	0,54	0,18	0,26	0,42	0,86	0,55	–	–	–	–	–	3	150	0
			Н	К	К	К	К	Н	Н	К	К	К	–	–	–	–	–			
7	0,82	14	0,68	0,52	0,41	0,28	0,15	0,22	0,03	0,54	0,76	0,92	0,26	0,22	0,39	0,16	–	8	400	1
			К	К	К	Н	Н	Н	Н	К	К	К	Н	Н	Н	Н	–			

Закінчення табл. 12.11

№ ваг.	R	N, пас.	Пасажири															K, пас.	B, грн	$B > 200$
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15			
8	0,18	6	0,74	0,33	0,15	0,01	0,96	0,45	–	–	–	–	–	–	–	–	–	3	150	0
			К	Н	Н	Н	К	К	–	–	–	–	–	–	–	–	–			
9	0,68	12	0,05	0,19	0,83	0,75	0,66	0,52	0,47	0,34	0,20	0,48	0,39	0,79	–	–	–	5	250	1
			Н	Н	К	К	К	К	К	Н	Н	К	Н	К	–	–	–			
10	0,32	8	0,36	0,07	0,69	0,87	0,32	0,72	0,14	0,28	–	–	–	–	–	–	–	5	250	1
			Н	Н	К	К	Н	К	Н	Н	–	–	–	–	–	–	–			
Разом		99	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	47	2 350	5

Згідно з табл. 12.11 загальні збитки залізниці від перевезення безквиткових пасажирів складають 2 350 грн, при цьому ймовірність того, що збитки з одного вагона перевищать 200 грн, становить $P\left(B_i > 200\right) = 5/10 = 0,50$.

12.4.5. Моделювання роботи контейнерного майданчика

Умова задачі. На вантажний двір прибувають вагони з контейнерами. 20 % контейнерів перевантажуються відразу на автомобілі по «прямому варіанту»; інші вивантажуються на контейнерний майданчик. Час очікування вивозу контейнера з майданчика T є випадковою величиною, розподіленою за законом Ерланга з параметрами $M\left[T\right] = 24$ год, $K = 2$, $T_{\min} = 3$ год. Виконати моделювання вивантаження 10 контейнерів та визначити ймовірність того, що тривалість очікування контейнером на майданчику перевищить одну добу.

Розв'язання. Згідно з умовами задачі 20 % контейнерів перевантажуються по «прямому варіанту», тобто ймовірність такої події становить $P\left(\Pi\right) = 0,20$. Перевантаження по «прямому варіанту» моделюється як випадкова подія (див. п. 12.2.2). Якщо випадкове число $R_i\left[0;1\right] < P\left(\Pi\right)$, то i-й контейнер перевантажується одразу у автомобіль (A) – відповідно для такого контейнера тривалість очікування на складі $T_i = 0$, інакше – вивантажується на склад (C). Наприклад, перший контейнер (при $R_1 = 0,85$) вивантажується на склад (C), оскільки $0,85 > 0,20$.

Тривалість зберігання контейнера на складі є неперервною ВВ, яка розподілена за обмеженим законом Ерланга та моделюється за виразом (12.6); при цьому для кожного контейнера використовується два випадкових числа $R_i\left[0;1\right]$. Наприклад, для першого контейнера маємо:

$$t_1 = \frac{3-24}{2}\ln\left(0,63\cdot 0,42\right) + 3 = 17,0 \text{ год.}$$

Моделювання вивантаження 10 контейнерів виконано в табл. 12.12.

Таблиця 12.12

Моделювання вивантаження контейнерів на склад

i	R_1	A/C	R_2	R_3	t_i, год	$t > 24$
1	0,85	C	0,63	0,42	17,0	0
2	0,24	C	0,28	0,85	18,1	0
3	0,12	A	–	–	0,0	0

Закінчення табл. 12.12

i	R_1	A/C	R_2	R_3	t_i, год	$t > 24$
4	0,76	C	0,15	0,25	37,5	1
5	0,62	C	0,55	0,38	19,4	0
6	0,44	C	0,47	0,96	11,4	0
7	0,08	A	–	–	0,0	0
8	0,78	C	0,74	0,66	10,5	0
9	0,36	C	0,43	0,17	30,5	1
10	0,16	A	–	–	0,0	0

Згідно з табл. 12.12 зафіксовано 2 випадки, коли термін зберігання контейнера на складі перевищив добу; отже, ймовірність цієї події становить $P(t > 24) = 2/10 = 0,20$.

12.4.6. Моделювання руху поїзда по перегону

Умова задачі. На шляху прямування поїзда, що рухається по перегону, раптово виникає перешкода. Відстань від перешкоди до поїзда L є випадковою величиною, розподіленою за показниковим законом з параметром $M[L] = 800$ м. Швидкість поїзда V є ВВ, що розподілена за нормальним законом з параметрами $M[V] = 85$ км/год, $\sigma[V] = 15$ км/год. Помітивши перешкоду, машиніст застосовує екстрене гальмування. Після цього протягом $t_{\text{підг}} = 2,2$ с відбувається підготовка гальм до дії. Потім спрацьовують гальма, і поїзд знижує швидкість на $dv = 0,12$ км/год на кожному метрі шляху. Виконати моделювання руху 10 поїздів та визначити ймовірність того, що поїзд зіштовхнеться з перешкодою.

Розв'язання. Відстань від поїзда до перешкоди L є ВВ, що розподілена за показниковим законом та моделюється за виразом (12.7); при цьому для кожного поїзда використовується одне випадкове число $R_i[0; 1]$. Наприклад, для першого поїзда (при $R_1 = 0,63$) маємо: $L_1 = -800\ln(0,63) = 396,6$ м.

Швидкість поїзда V є випадковою величиною, що розподілена за нормальним законом та моделюється за виразом (12.8); при цьому використовуються випадкові числа Z_i (12.9). Наприклад, для першого поїзда $(Z_1 = -1,10)$ маємо: $V_1 = 85 + 15(-1,10) = 68,5$ км/год.

За час $t_{\text{підг}}$ підготовки гальм до роботи i-й поїзд, рухаючись зі швидкістю V_i, встигає пройти певну відстань dL_i та відповідно скоротити початкову відстань до перешкоди до величини L_i'. Вказані величини визначаються як

$$dL_i = \frac{1\,000 V_i t_{\text{підг}}}{3\,600}, \quad L_i' = L_i - dL_i .$$

Для першого поїзда маємо:

$$dL_i = \frac{1\,000 \cdot 68,5 \cdot 2,2}{3\,600} = 41,9 \text{ м}, \quad L_i' = 369,6 - 41,9 = 327,7 \text{ м}.$$

Довжина шляху гальмування $L_i^{\text{гальм}}$, який необхідний для зупинки i-го поїзда, визначається за виразом: $L_i^{\text{гальм}} = V_i / dv$; при цьому, якщо $L_i^{\text{гальм}} > L_i'$, (довжина шляху гальмування більша за відстань до перешкоди на момент початку роботи гальмівної системи), то поїзд зіткнеться з перешкодою. Для першого поїзда маємо:

$$L_1^{\text{гальм}} = 68,5/0,12 = 570,8 \text{ м} > 327,7 .$$

Отже, перший поїзд зіткнеться з перешкодою. Моделювання для 10 поїздів виконано у табл. 12.13.

Таблиця 12.13

Моделювання зіткнення поїздів з перешкодою

i	R	L, м	Z	V, км/год	dL, м	L', м	$L^{\text{гальм}}$, м	Зіткнення
1	0,63	369,6	–1,10	68,5	41,9	327,7	570,8	1
2	0,15	1 517,7	0,38	90,7	55,4	1 462,3	755,8	0
3	0,28	1 018,4	1,23	103,45	63,2	955,2	862,1	0
4	0,08	2 020,6	0,85	97,75	59,7	1 960,8	814,6	0
5	0,92	66,7	–0,63	75,55	46,2	20,5	629,6	1
6	0,36	817,3	1,78	111,7	68,3	749,1	930,8	1
7	0,44	656,8	0,52	92,8	56,7	600,1	773,3	1
8	0,42	694,0	–0,86	72,1	44,1	649,9	600,8	0
9	0,39	753,3	–0,74	73,9	45,2	708,1	615,8	0
10	0,28	1 018,4	1,52	107,8	65,9	952,5	898,3	0

Згідно з табл. 12.13 з перешкодою зіткнулись 4 поїзди; отже, ймовірність зіткнення складає $P(\text{зіткн}) = 4/10 = 0,40$.

12.4.7. Моделювання закріплення состава на станційних коліях

Умова задачі. Состав випадкової довжини, що розподілена за нормальним законом з параметрами: $M\left[S\right]=500$ м, $\sigma\left[S\right]=150$ м, встановлюється в межах корисної довжини колії довжиною $L=1\,000$ м випадковим чином. Профіль колії складається з двох елементів: перший – довжиною $L_1=600$ м, ухилом $i_1=4$ ‰; другий – довжиною $L_2=400$ м, ухилом $i_2=2$ ‰. Состав повинний бути закріплений гальмівними башмаками з розрахунку 2 башмаки на 1 ‰ середнього ухилу під составом. Виконати моделювання розміщення та закріплення на колії 10 составів, знайти ймовірність того, що состав розташується повністю на одному елементі профілю та визначити середню кількість гальмівних башмаків, необхідних для закріплення состава.

Розв'язання. Довжина состава S_i є випадковою величиною, що має нормальний розподіл та моделюється за виразом (12.8). При цьому використовуються випадкові числа Z_i (12.9). Наприклад, для першого состава $\left(Z_1=1{,}85\right)$: $S_1=500+150\cdot 1{,}85=777{,}5$ м.

Для визначення координати зупинки *i*-го поїзда на колії визначимо величину відстані від голови поїзда до кінця колії dS_i (рис. 12.10). Оскільки поїзд зупиняється випадковим чином, то випадкова величина dS_i має рівномірний розподіл і моделюється за виразом (12.10). При цьому мінімальне значення $dS_{\min}=0$, а максимальне $dS_{\max i}=\left(L_1+L_2\right)-S_i$.

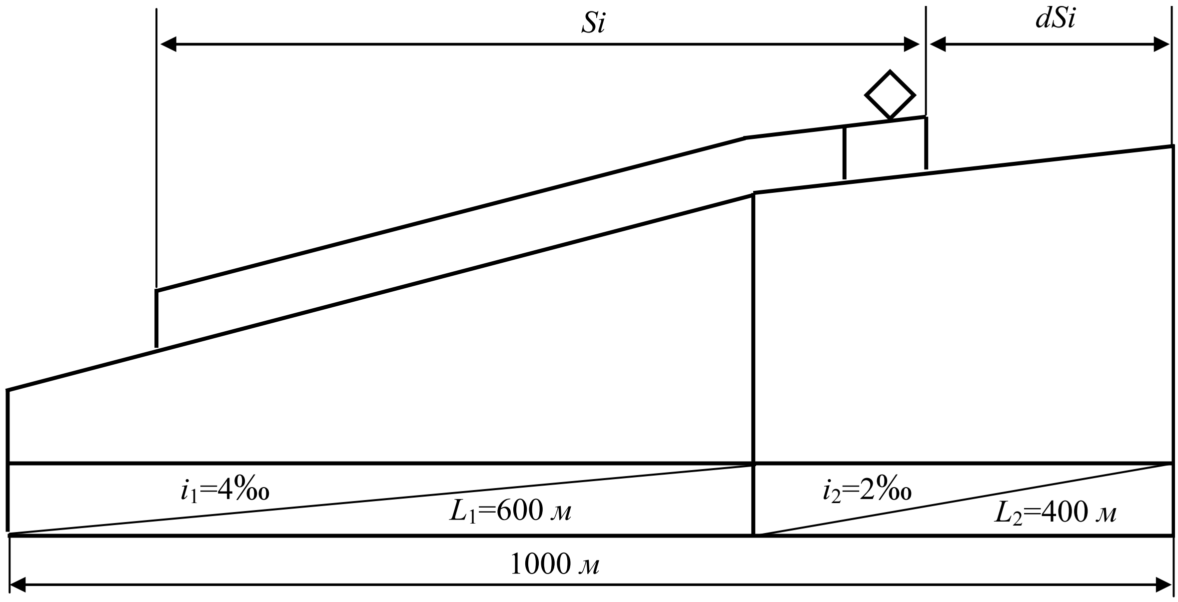


Рис. 12.10. Моделювання зупинки поїзда на колії

Визначимо величину dS_i для першого поїзда $\left(R_1 = 0,74\right)$:

$$dS_{\max 1} = \left(600 + 400\right) - 777,5 = 222,5 \text{ м}, \; dS_1 = 0 + \left(222,5 - 0\right)0,74 = 164,7 \text{ м}.$$

Середній ухил під составом визначається таким чином:

– якщо $dS_i > L_2$, то состав повністю розташований на ділянці *1*, $i_{\text{сер}} = 4$ ‰;

– якщо $\left(S_i + dS_i\right) \le L_2$, то состав повністю розташований на ділянці *2*, $i_{\text{сер}} = 2$ ‰;

– інакше – состав розташовується на двох ділянках; при цьому на ділянці *2* розташована частина состава довжиною $l_{2i} = 400 - dS_i$, а на ділянці *1* – $l_{1i} = S_i - l_{2i}$, середній ухил становить $i_{\text{сер}i} = \left(i_1 l_{1i} + i_2 l_{2i}\right) / S_i$.

Кількість башмаків для закріплення состава визначається як $N_i = 2 i_{\text{сер}i}$.

Перший состав розташований на двох ділянках:

$$l_2 = 400 - 164,7 = 235,3 \text{ м}, \quad l_1 = 777,5 - 235,3 = 542,2 \text{ м},$$

$$i_{\text{сер}1} = 4 \cdot 542,2 + 2 \cdot 235,3 = 3,39 \text{ ‰}, \quad N_1 = 2 \cdot 3,39 \approx 7 \text{ башмаків}.$$

Моделювання закріплення 10 составів виконано в табл. 12.14.

Таблиця 12.14

Моделювання закріплення составів на колії

i	Z	S_i, м	$dS_{\max i}$	R	dS_i, м	l_1, м	l_2, м	$i_{\text{сер}}$, ‰	N, башм.	Одна ділянка
1	1,85	777,5	222,5	0,74	164,7	542,2	235,3	3,39	7	0
2	–0,56	416,0	584,0	0,76	443,8	416,0	0,0	4,00	8	1
3	–0,96	356,0	644,0	0,02	12,9	0,0	356,0	2,00	4	1
4	1,46	719,0	281,0	0,53	148,9	467,9	251,1	3,30	7	0
5	–2,15	177,5	822,5	0,24	197,4	0,0	177,5	2,00	4	1
6	1,15	672,5	327,5	0,89	291,5	564,0	108,5	3,68	8	0
7	–0,84	374,0	626,0	0,13	81,4	55,4	318,6	2,30	5	0
8	–1,28	308,0	692,0	0,87	602,0	308,0	0,0	4,00	8	1
9	0,45	567,5	432,5	0,51	220,6	388,1	179,4	3,37	7	0
10	2,03	804,5	195,5	0,66	129,0	533,5	271,0	3,33	7	0
Разом									65	4

Згідно з табл. 12.14 повністю на одному елементі профілю розташовані 4 состави, тобто ймовірність цієї події становить 0,4. Для закріплення составів на колії в середньому необхідно $N_{\text{сер}} = 65/10 = 6,5$ башмака.

12.4.8. Моделювання розформування та накопичення составів

Умова задачі. Состави розформуються на сортувальній гірці з інтервалами, розподіленими за законом Ерланга з параметрами $M\left[T\right] = 20$ хв, $K = 3$, $T_{\min} = 12$ хв. Під час розпуску вагони надходять на колію № 12 сортувального парку з ймовірністю $P\left(12\right) = 0,5$. Кількість вагонів у групі, що надходить на колію № 12, розподілена за законом Пуассона; при цьому середня кількість вагонів у групі дорівнює $n_{\text{сер}} = 5$. Накопичення на колії № 12 завершується, коли состав поїзда досягає 20 вагонів. Виконати моделювання накопичення 2 составів на колії № 12 та визначити середній простій вагона під накопиченням, якщо залишок вагонів на колії № 12 на початок моделювання складає $n_{\text{зал}} = 8$ вагонів.

Розв'язання. Інтервал між розформуванням составів є ВВ, що розподілена за обмеженим розподілом Ерланга та моделюється за виразом (12.6); при цьому для кожного інтервалу використовується по три випадкові числа $R_i\left[0;1\right]$. Наприклад, для першого інтервалу (при $R_1 = 0,85$; $R_2 = 0,74$; $R_3 = 0,05$):

$$T_1 = \frac{12-20}{3}\ln\left(0,85\cdot 0,74\cdot 0,05\right) + 12 = 21,2 \text{ хв.}$$

Надходження вагонів після кожного розпуску моделюється як випадкова подія (див. п. 12.2.2) з ймовірністю $P\left(12\right) = 0,5$; при цьому якщо випадкове число $R_i\left[0;1\right] < P\left[12\right]$, то вважаємо, що після розформування чергового состава на колію № 12 надійшла група вагонів. Наприклад, після розформування першого состава (при $R_i = 0,15$) на колію № 12 надійшла група вагонів $\left(0,15 < 0,50\right)$.

Кількість вагонів n_i у групі, що надходить на колію № 12, є дискретною ВВ із законом розподілу Пуассона та моделюється за виразом (12.13); при цьому для моделювання кожної групи використовується така кількість випадкових чисел $R_i\left[0;1\right]$, щоб їх добуток був меншим за величину $e^{-n_{\text{сер}}} = e^{-5} = 0,0067$. Для прикладу, визначимо кількість вагонів у першій групі (для послідовності випадкових чисел 0,33; 0,78; 0,24; 0,89; 0,07):

1) $0,33 > 0,0067$;

2) $0,33\cdot 0,78 = 0,2574 > 0,0067$;

3) $0,33\cdot 0,78\cdot 0,24 = 0,0618 > 0,0067$;

4) $0,33 \cdot 0,78 \cdot 0,24 \cdot 0,89 = 0,055 > 0,0067$;

5) $0,33 \cdot 0,78 \cdot 0,24 \cdot 0,89 \cdot 0,07 = 0,0038 < 0,0067$.

Оскільки використано 5 випадкових чисел, то кількість вагонів у першій групі згідно з (2.13) становить $n_1 = 5 - 1 = 4$ вагони.

Кількість вагонів, що розташована на колії № 12 після надходження i-ї групи, визначається як: $N_i = N_{i-1} + n_i$, де N_{i-1} – кількість вагонів, які були на колії № 12 до надходження i-ї групи. Накопичення завершується при досягненні состава 20 вагонів; при цьому якщо $N_i > 20$, то для накопичення наступного состава залишається 20 – N_i вагонів. Середній простій вагона під накопиченням визначається як: $t_{\text{сер}} = \dfrac{\sum N_i \cdot t_i}{n_{\text{зал}} + \sum n_i}$, де t_i – тривалість знаходження на колії групи з N_i вагонів, хв. Величина t_i визначається як сума інтервалів між розформуванням составів, коли на колію № 12 надходили вагони.

Моделювання накопичення 5 составів виконано в табл. 12.15.

Таблиця 12.15

Моделювання розформування та накопичення составів

i	R_1, R_2, R_3	T, хв	R	Колія 12?	R_j	$\Pi(R_j)$	n_i, ваг.	N_i, ваг.	t_i, хв	$n_i \cdot t_i$, ваг.-хв
Залишок								8	21,2	169,6
1	0,85 0,74 0,05	21,2	0,15	так	0,33	0,3300	4	12	19,9	239,2
					0,78	0,2574				
					0,24	0,0618				
					0,89	0,0550				
					0,07	0,0038				
2	0,24 0,76 0,28	19,9	0,48	так	0,44	0,4400	7	19	31,6	600,0
					0,69	0,3036				
					0,29	0,0880				
					0,77	0,0678				
					0,82	0,0556				
					0,56	0,0311				
					0,41	0,0128				
					0,12	0,0015				

i	R_1, R_2, R_3	T, хв	R	Колія 12?	R_j	$\Pi(R_j)$	n_i, ваг.	N_i, ваг.	t_i, хв	$n_i \cdot t_i$, ваг.-хв
3	0,12 0,02 0,27	31,6	0,92	ні	–	–	0	19	23,7	449,9
4	0,11 0,76 0,15	23,7	0,29	так	0,46 0,62 0,95 0,39 0,69 0,83 0,84 0,25 0,39	0,4600 0,2852 0,2709 0,1057 0,0729 0,0605 0,0508 0,0127 0,0050	8	27	–	–
Накопичено состав, залишок $27-20=7$ вагонів								7	18,7	130,7
5	0,62 0,24 0,55	18,7	0,76	ні	–	–	0	7	16,5	115,6
6	0,44 0,89 0,47	16,5	0,07	так	0,26 0,88 0,69 0,74 0,26 0,12	0,2600 0,2288 0,1579 0,1168 0,0304 0,0036	5	12	24,6	294,9
7	0,08 0,13 0,86	24,6	0,32	так	0,52 0,14 0,38 0,03	0,5200 0,0728 0,0277 0,0008	3	15	13,3	199,7

Закінчення табл. 12.15

i	R_1, R_2, R_3	T, хв	R	Колія 12?	R_j	$П(R_j)$	n_i, ваг.	N_i, ваг.	t_i, хв	$n_i \cdot t_i$, ваг.-хв
8	0,78 0,87 0,90	13,3	0,68	ні	–	–	0	15	18,8	281,6
9	0,36 0,51 0,43	18,8	0,41	так	0,17 0,06 0,36	0,1700 0,0102 0,0037	2	17	19,4	329,1
10	0,16 0,66 0,60	19,4	0,23	так	0,86 0,27 0,69 0,34 0,57 0,31 0,64	0,8600 0,2322 0,1602 0,0545 0,0311 0,0096 0,0062	6	23	–	–
Накопичено состав, залишок $23-20=3$ вагони								3	–	–
Разом							35	–	–	2810,2

Усього на колію № 12 надійшло 35 вагонів; загальній простій вагонів на колії № 12 склав 2 810,2 ваг.-хв. Таким чином, середній простій одного вагона на колії № 12 під накопиченням становить $t_{\text{сер}} = 2\,810,2/(8+35) = 65,4$ хв.

Контрольні запитання та завдання

1. Які недоліки аналітичних моделей при дослідженні складних систем?
2. Чому для дослідження транспортних систем доцільно використовувати імітаційне моделювання?
3. Які основні відмінності імітаційних моделей від аналітичних?
4. Що являє собою імітаційне моделювання?
5. Що являє собою імітаційна модель?

6. Пояснити принцип дослідження складних систем за допомогою імітаційного моделювання.
7. Які імітаційні моделі належать до дискретних, а які – до неперервних?
8. Сформулювати основну задачу методів імітаційного моделювання.
9. Загальний порядок побудови та використання імітаційної моделі.
10. Як можна перевірити адекватність імітаційної моделі?
11. Вказати основні переваги імітаційного моделювання.
12. Вказати основні недоліки імітаційного моделювання.
13. Які випадкові числа використовуються при імітаційному моделюванні? Чому їх не можна обирати довільно?
14. Пояснити принцип отримання псевдовипадкових чисел.
15. Що таке випадкова подія? Як визначається ймовірність настання випадкової події?
16. Пояснити графічний метод моделювання випадкових подій.
17. Пояснити аналітичний метод моделювання випадкових подій.
18. Що таке повна група несумісних випадкових подій? Чому дорівнює сума ймовірностей випадкових подій, що утворюють повну групу?
19. Пояснити графічний метод моделювання групи випадкових подій, які утворюють повну групу.
20. Пояснити аналітичний метод моделювання групи випадкових подій, які утворюють повну групу.
21. Що таке випадкова суміш подій?
22. Пояснити принцип моделювання подій, що утворюють випадкову суміш.
23. Що таке випадкова величина?
24. Які випадкові величини називають дискретними? Наведіть приклади.
25. Які випадкові величини називають неперервними? Наведіть приклади.
26. Що визначає закон розподілу випадкової величини?
27. Що визначає інтегральна функція розподілу випадкової величини?
28. Що визначає диференціальна функція розподілу випадкової величини?

29. Яким чином можна задавати закон розподілу випадкової величини?
30. Що являє собою статистичний ряд розподілу випадкової величини? Навести приклад.
31. Вказати основні характеристики випадкової величини.
32. Що характеризує математичне сподівання випадкової величини? Як визначається математичне сподівання?
33. Що характеризує дисперсія та середнє квадратичне відхилення випадкової величини? Як визначаються ці параметри?
34. Пояснити принцип графічного моделювання неперервних та дискретних випадкових величин.
35. Вказати найбільш поширені закони розподілу дискретних та неперервних випадкових величин.
36. Який закон розподілу визначає кількість випадків появи події в k незалежних дослідах, якщо в кожному з дослідів відома ймовірність цієї події?
37. Який закон розподілу визначає кількість випадків появи деякої випадкової події за одиницю часу, якщо відома інтенсивність її появи?
38. Які випадкові числа використовуються при аналітичному моделюванні випадкових величин з нормальним законом розподілу? Як можна отримати такі числа?
39. Контейнери з вагонів вивантажуються на контейнерний майданчик, де встановлюються у 5 рядів по 20 контейнерів у кожному. Відстань між центрами контейнерів у ряді 2,2 м, між рядами – 2,0 м. Відстань від осі залізничної колії до осі найближчого (першого) ряду 3,5 м. Контейнер з вагона вивантажують на вільне місце на майданчику, яке з однаковою ймовірністю може бути в будь-якому місці будь-якого ряду. Контейнер, що вивантажується з вагона, розташований у випадковій точці вантажного фронту, довжина якого дорівнює довжині контейнерного майданчика. Виконати 5 разів моделювання положення контейнера на вантажному фронті й положення вільного місця для нього на контейнерному майданчику. Визначити середнє значення відстані переміщення кранового візка при вивантаженні контейнера.
40. На вантажний район під вивантаження прибувають подачі вагонів, у яких можуть бути піввагони й криті вагони. Криті

розвантажуються біля вантажної платформи, яка дозволяє здійснювати вивантаження двох вагонів одночасно. Розвантаження піввагонів здійснюється козловим краном по одному. Після вивантаження всіх вагонів вони прибираються. Кількість вагонів у подачі являє собою випадкову величину, що рівномірно розподілена у інтервалі [2; 6]. Ймовірність того, що вагон є критим $p = 0,4$. Норма часу на розвантаження піввагона 20 хв, норма часу на розвантаження одного або двох критих вагонів біля платформи 1 год. Виконати моделювання вивантаження 3 подач та визначити середнє значення тривалості простою подачі вагонів під вивантаженням.

41. Зі станцій *А* та *Б*, що обмежують одноколійну ділянку, одночасно відправляються поїзди в зустрічному напрямку. Між станціями розташований роз'їзд. Час ходу поїздів від станцій *А* та *Б* є випадковою величиною, розподіленою за нормальним законом з параметрами $M\left[T_A\right]=12$ хв, $\sigma\left[T_A\right]=2,5$ хв та $M\left[T_Б\right]=16$ хв, $\sigma\left[T_Б\right]=4$ хв. Поїзд, що прибуває на роз'їзд першим, приймається на бокову колію і відправляється з неї через 1,5 хвилин після прибуття другого поїзда. Виконати моделювання часу ходу до роз'їзду зі станцій *А* і *Б* для 10 пар поїздів та визначити ймовірність того, що поїзд з *А* буде пропущено без зупинки на роз'їзді.
42. На тупиковій колії у випадковому порядку стоять платформа, піввагон, цистерна, хопер і критий вагон. Необхідно переставити піввагон і платформу на сусідню колію; інші вагони повинні залишитися на тій самій колії. Час напіврейсу перестановки визначається як $T = a + bm$ (де $a = 0,95$, $b = 0,25$, m – кількість вагонів при локомотиві). Перед маневрами локомотив перебуває на колії з вагонами; по закінченні маневрів він повинен повернутися на ту ж колію. Виконати моделювання п'яти груп вагонів та знайти середнє значення тривалості виконання маневрів.
43. На елеватор протягом години у випадкові моменти часу надходить 5 автомобілів під вивантаження зерна. Для вивантаження автомобілів на елеваторі передбачений склад бункерного типу з одним вантажним місцем. Тривалість виконання повного комплексу вантажних операцій при вивантаженні автомобіля $t_{\text{вант}}$ є випадковою величиною, що розподілена за

нормальним законом з параметрами: математичне сподівання $M\left[t_{\text{вант}}\right]=15$ хв, середнє квадратичне відхилення $\sigma\left[t_{\text{вант}}\right]=3$ хв. Виконати моделювання роботи складу зерна з обслуговування п'яти автомобілів та за результатами моделювання визначити: ймовірність затримки виконання вантажних операцій з автомобілем; середню тривалість очікування автомобілем вивантаження; середню тривалість перебування автомобіля на елеваторі; коефіцієнт завантаження вантажного пристрою на складі зерна. Виконати моделювання роботи складу зерна за умови наявності двох вантажних місць.

44. На вантажній станції перебувають дві групи вагонів, кожна з яких має призначення на одну з двох під'їзних колій. Кількість вагонів у кожній групі є випадковою величиною, рівномірно розподіленою в інтервалі [10; 25]. Тривалість подачі кожної групи є випадковою величиною, що розподілена за нормальним законом з параметрами: $M\left[t\right]=30$ хв, $\sigma\left[t\right]=5$ хв. Черговість подачі вагонів вибирається таким чином, щоб загальний простій вагонів на станції в очікуванні подачі був мінімальним. Виконати імітаційне моделювання п'яти подач вагонів, визначити ймовірність того, що першими будуть подані вагони на першу під'їзну колію, а також середній простій одного вагона на станції в очікуванні подачі на під'їзну колію.
45. На колії перебувають состав з 10 порожніх вагонів, кожний з яких може бути придатним під навантаження з ймовірністю 0,9. Оглядач вагонів по черзі перевіряє вагони і виявляє дефект з ймовірністю 0,9. При цьому він може з ймовірністю 0,15 помилково забракувати придатний під навантаження вагон. Час огляду одного вагона розподілено за законом Ерланга з параметрами $K=2$, середній час $M\left[T_{\text{о}}\right]=4$ хв, мінімальний – 2 хв. Виконати моделювання огляду 10 составів, визначити ймовірність помилки оглядача.
46. На двох коліях перебувають дві групи вагонів, випадкова величина кожної з яких розподілена рівномірно в інтервалі [10; 30]. Відомо, що серед цих вагонів два несправних, причому з ймовірністю 0,2 обидва вони перебувають на I колії і з ймовірністю 0,15 – на II колії. Необхідно ці 2 вагони забрати на

третю вільну колію так, щоб загальне число переміщуваних при маневрах вагонів було мінімальним; перестановку можна робити з будь-якої сторони колій. Виконати 10 разів моделювання розташування вагонів на двох коліях, знайти ймовірність того, що обидва несправних вагона перебувають на одній колії.

47. Кількість вагонів у составі є випадковою величиною, рівномірно розподіленою в інтервалі [20; 30]. При розпуску кожен вагон состава прямує на певну колію сортувального парку. Перший вагон состава з рівною ймовірністю може прямувати на кожну з 6 колій сортувального парку. Кожний з наступних вагонів з імовірністю 0,6 прямує на ту саму колію, що й попередні; усі інші призначення при цьому рівноімовірні. Виконати моделювання призначень вагонів п’яти составів; знайти ймовірність того, що хоча б на одну колію потрапить не менше 1/3 частини вагонів состава.
48. Протягом кожної години через перетин одно- і двоколійної ліній у випадкові моменти часу пропускається три поїзди (парний і непарний по двоколійній лінії та один поїзд по одноколійній лінії). Поїзд одноколійної лінії пропускається, якщо це не викликає затримки поїздів двоколійної лінії; у іншому випадку він затримується до їх повного прямування. Час зайняття перетину поїздами розподілено за нормальним законом з параметрами $M\left[t\right]=5$ хв, $D\left[t\right]=4$ хв^2. Виконати моделювання пропуску поїздів через перетин протягом 10 годин, знайти ймовірність затримки поїзда одноколійної лінії.
49. На колії є група вагонів, випадкова величина якої розподілена за законом Пуассона; середнє число вагонів у групі – 6. Кожний з вагонів з ймовірністю 0,7 є критим, з імовірністю 0,3 є навантаженим і з ймовірністю 0,8 є справним. Потрібно відібрати під навантаження порожні криті вагони. Час огляду одного вагона розподілено за показниковим законом; середній час огляду $M\left[T_{\text{o}}\right]=4$ хв, мінімальне – 2 хв. Виконати моделювання 10 груп вагонів, знайти ймовірність того, що в групі виявиться придатним під навантаження хоча б один критий вагон.

50. Зі станції *А* до станції *Б* ведуть два паралельних ходи. Поздовжній профіль першого ходу дозволяє пропускати поїзди масою до 4 200 т з одиночною тягою; поздовжній профіль другого ходу дозволяє пропускати поїзди масою до 5 000 т з одиночною тягою. Маса поїзда є випадковою величиною, розподіленою за нормальним законом з параметрами $M[Q]=3\,900$ т, $\sigma[Q]=400$ т. Поїзди масою до 4 200 т відправляються по першому ходу, поїзди масою 4 200 т і більше з ймовірністю 0,8 відправляються по другому ходу, а інакше по першому з подвійною тягою. Час руху поїзда по першому ходу 6 годин, по другому – 8 годин. Виконати моделювання руху 25 поїздів та визначити ймовірність того, що поїзд буде відправлено з подвійною тягою.

БІБІЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Вентцель, Е. С. Исследование операций [Текст] / Е. С. Вентцель. – Москва : Сов. радио, 1972. – 552 с.
2. Акулиничев, В. М. Математические методы в эксплуатации железных дорог [Текст] / В. М. Акулиничев, В. А. Кудрявцев, А. Н. Корешков. – Москва : Транспорт, 1981. – 223 с.
3. Таха, Х. А. Введение в исследование операций [Текст] / Х. А. Таха. – Москва : Изд. дом «Вильямс», 2001. – 912 с.
4. Подиновский, В. В. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач [Текст] /В. В. Подиновский, В. Д. Ногин. – Москва : Физматлит, 2007. – 256 с.
5. Кунда, Н. Т. Дослідження операцій у транспортних системах [Текст] / Н. Т. Кунда. – Київ : Видавн. дім «Слово», 2008. – 400 с.
6. Лунгу, К. Н. Линейное программирование. Руководство к решению задач [Текст] / К. Н. Лунгу. – Москва : Физматлит, 2005. – 128 с.
7. Исследование операций в экономике [Текст] / под ред. проф. Н. Ш. Кремера. – Москва : ЮНИТИ, 2002. – 407 с.
8. Данциг, Дж. Линейное программирование: его применения и обобщения [Текст] / Дж. Данциг. – Москва : Прогресс, 1966. – 600 с.
9. Кофман, А. Методы и модели исследования операций. Целочисленное программирование [Текст] / А. Кофман, А. Анри-Лабордер. – Москва : Мир, 1977. – 432 с.
10. Вагнер, Г. Основы исследования операций. Т. 1 [Текст] / Г. Вагнер. – Москва : Мир, 1972. – 337 с.
11. Банди, Б. Основы линейного программирования [Текст] / Б. Банди. – Москва : Радио и связь, 1989. – 176 с.
12. Басакер, Р. Конечные графы и сети [Текст] / Р. Басакер, Т. Саати. – Москва : Наука, 1974. – 368 с.
13. Кристофидес, Н. Теория графов. Алгоритмический подход [Текст] / Н. Кристофидес. – Москва : Мир, 1978. – 430 с.
14. Бочаров, Д. И. Применение методов математического моделирования при решении производственных задач [Текст] / Д. И. Бочаров, И. Н. Кравченя. – Гомель : БелГУТ, 2009. – 191 с.

15. Вагнер, Г. Основы исследования операций. Т. 2 [Текст] / Г. Вагнер. – Москва : Мир, 1973. – 489 с.
16. Зайченко, Ю.П. Исследование операций. Сборник задач. [Текст] / Ю. П. Зайченко, С. А. Шумилова. – Киев : Вища шк., 1990. – 239 с.
17. Жогаль, С. И. Задачи и модели исследования операций. Часть 1: Аналитические модели исследования операций [Текст] / С. И. Жогаль, И. В. Максимей. – Гомель : БелГУТ, 1999. – 110 с.
18. Голенко, Д. И. Статистические методы сетевого планирования и управления [Текст] / Д. И. Голенко. – Москва : Наука, 1968. – 400 с.
19. Костин, В. Н. Статистические методы и модели [Текст] / В. Н. Костин, Н. А Тишина. – Оренбург : ГОУ ОГУ, 2004. – 138 с.
20. Вагнер, Г. Основы исследования операций. Т. 3 [Текст] / Г. Вагнер. – Москва : Мир, 1973. – 504 с.
21. Максимей, И. В. Задачи и модели исследования операций. Часть 3: Технология имитации на ЭВМ и принятие решения [Текст] / И. В. Максимей, В. Д. Левчук, С. И. Жогаль, В. Н. Подобедов. – Гомель : БелГУТ, 1999. – 150 с.

Додаток А

ВИКОРИСТАННЯ ПАКЕТУ MS EXCEL ПРИ РОЗВ'ЯЗАННІ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Редактор електронних таблиці MS Excel є потужним та зручним засобом для виконання розрахунків, аналізу даних та розв'язання оптимізаційних задач. Для знаходження оптимальних рішень в MS Excel використовується пакет «Пошук рішення», що розміщується у вкладці «Дані» (рис. А.1).

Порядок використання пакету «Пошук рішення» розглянемо на конкретних прикладах задач лінійного програмування.

Задача про розподіл вагонів по вантажних фронтах. Розв'яжемо задачу лінійного програмування, умови якої задано в п. 2.3. Після формалізації задачі отримана така система обмежень та цільова функція:

$$\begin{cases} x_3 = 80 - x_1 - x_2 \\ y_1 = -1 + 0{,}1x_1 - 0{,}1x_2 \\ y_2 = 36 - x_1 \\ y_3 = 28 - x_2 \\ y_4 = -40 + x_1 + x_2 \end{cases}$$

$$C = 1\,600 + 10x_1 + 30x_2 \to \max .$$

У редакторі MS Excel заповнимо клітинки електронної таблиці згідно з рис. А.2. У клітинку B8 введемо вираз для розрахунку цільової функції «= 1 600 + 10*B1 + 30*B2» (див. рис. А.2).

Для знаходження розв'язку задачі скористаємось пакетом «Пошук рішення». Після натискання відповідної кнопки (див. рис. А.1) з'явиться діалогове вікно «Параметри пошуку рішення» (рис. А.3).

У полі «Оптимізувати цільову функцію» діалогового вікна вказати абсолютну адресу клітинки, у якій розраховується значення цільової функції – «$B$8», та вказати критерій оптимізації «Максимум». Абсолютні адреси клітинок зручно вказувати за допомогою маніпулятора «миша» безпосередньо на листі електронної таблиці.

У полі «Змінюючи значення змінних» вказати абсолютні адреси діапазону клітинок, в які будуть занесені значення змінних $x_1 \ldots x_3$, $y_1 \ldots y_4$ після знаходження оптимального розв'язку задачі – «$B$1:$B$7».

У поле «У відповідності до обмежень» ввести обмеження задачі для базисних змінних x_3, y_1, y_2, y_3 та y_4. Для вводу обмеження необхідно натиснути кнопку «Додати» (див. рис. А.3) та ввести обмеження за допомогою діалогового вікна «Додавання обмеження» (рис. А.4).

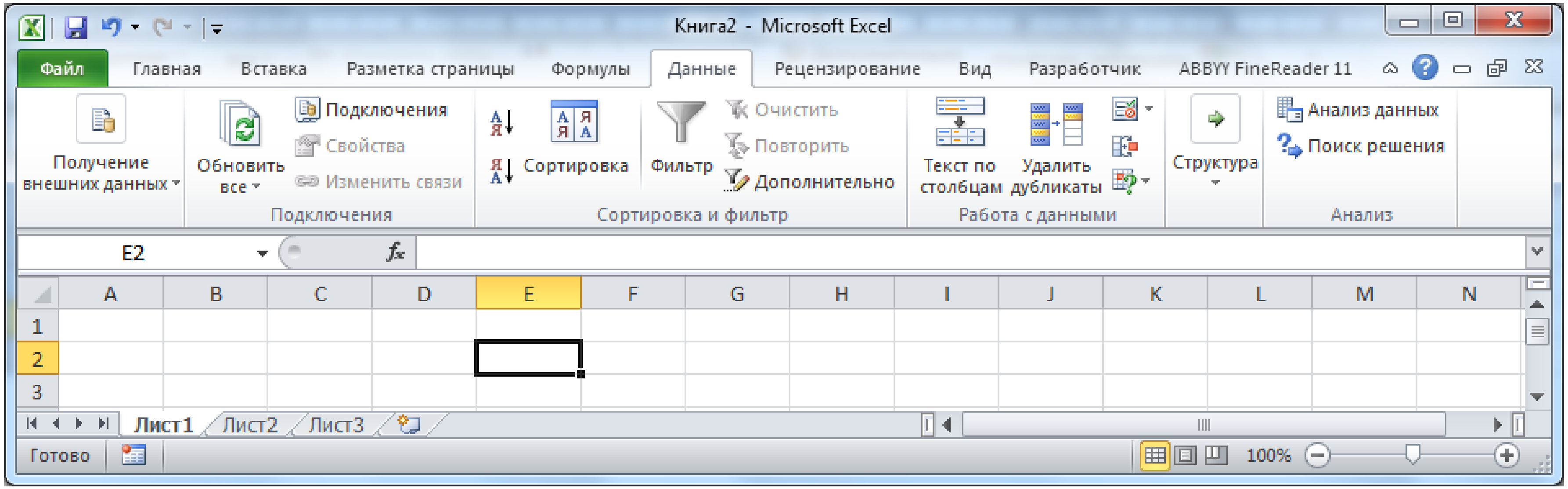


Рис. А.1. Вкладка «Дані» в редакторі MS Excel

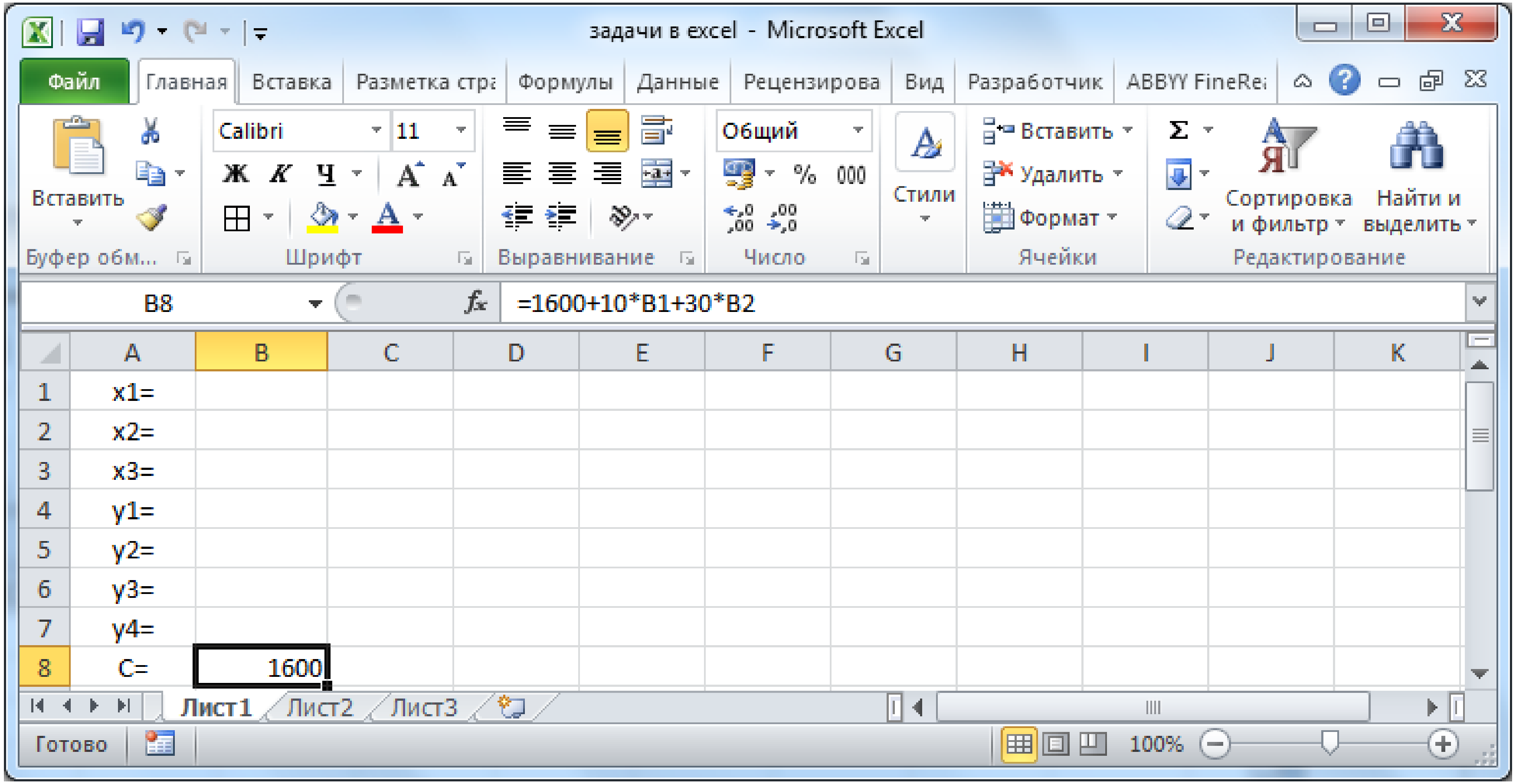


Рис. А.2. Підготовка таблиці до задачі про розподіл вагонів

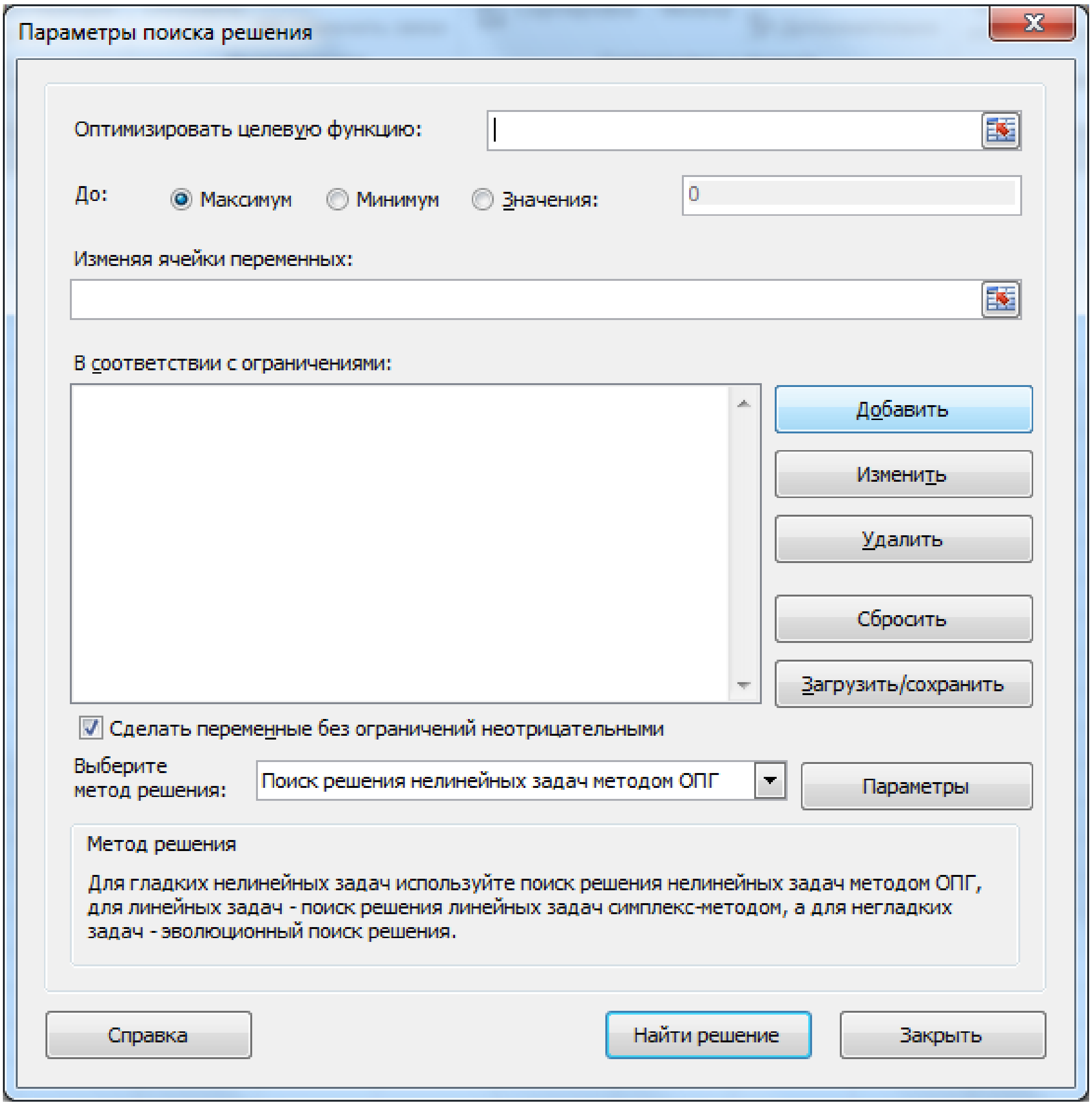


Рис. А.3. Діалогове вікно «Параметри пошуку рішення»

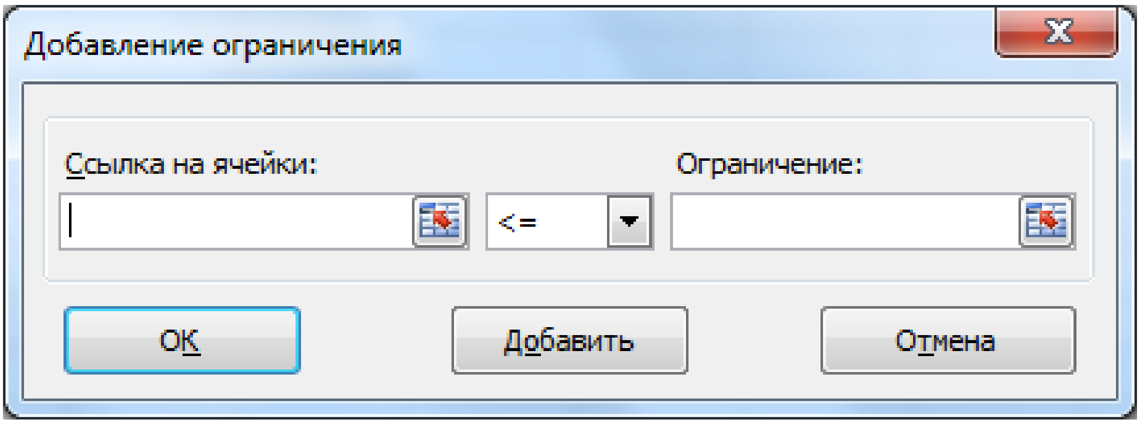


Рис. А.4. Діалогове вікно «Додавання обмеження»

Для задачі про розподіл вагонів необхідно ввести такі обмеження:
«$B$3 = 80 – $B$1 – $B$2», що відповідає обмеженню $x_3 = 80 - x_1 - x_2$;
«$B$4 = –1 + 0.1*$B$1 + 0.1*$B$2» $\left(y_1 = -1 + 0{,}1x_1 - 0{,}1x_2\right)$;
«$B$5 = 36 – $B$1» $\left(y_2 = 36 - x_1\right)$;
«$B$6 = 28 – $B$2» $\left(y_3 = 28 - x_2\right)$;
«$B$7 = –40 + $B$1 + $B$2» $\left(y_4 = -40 + x_1 + x_2\right)$.

Як метод розв'язання задачі вказати «Пошук рішення лінійних задач симплекс-методом». Вікно «Параметри пошуку рішення» із заповненими полями наведене на рис. А.5.

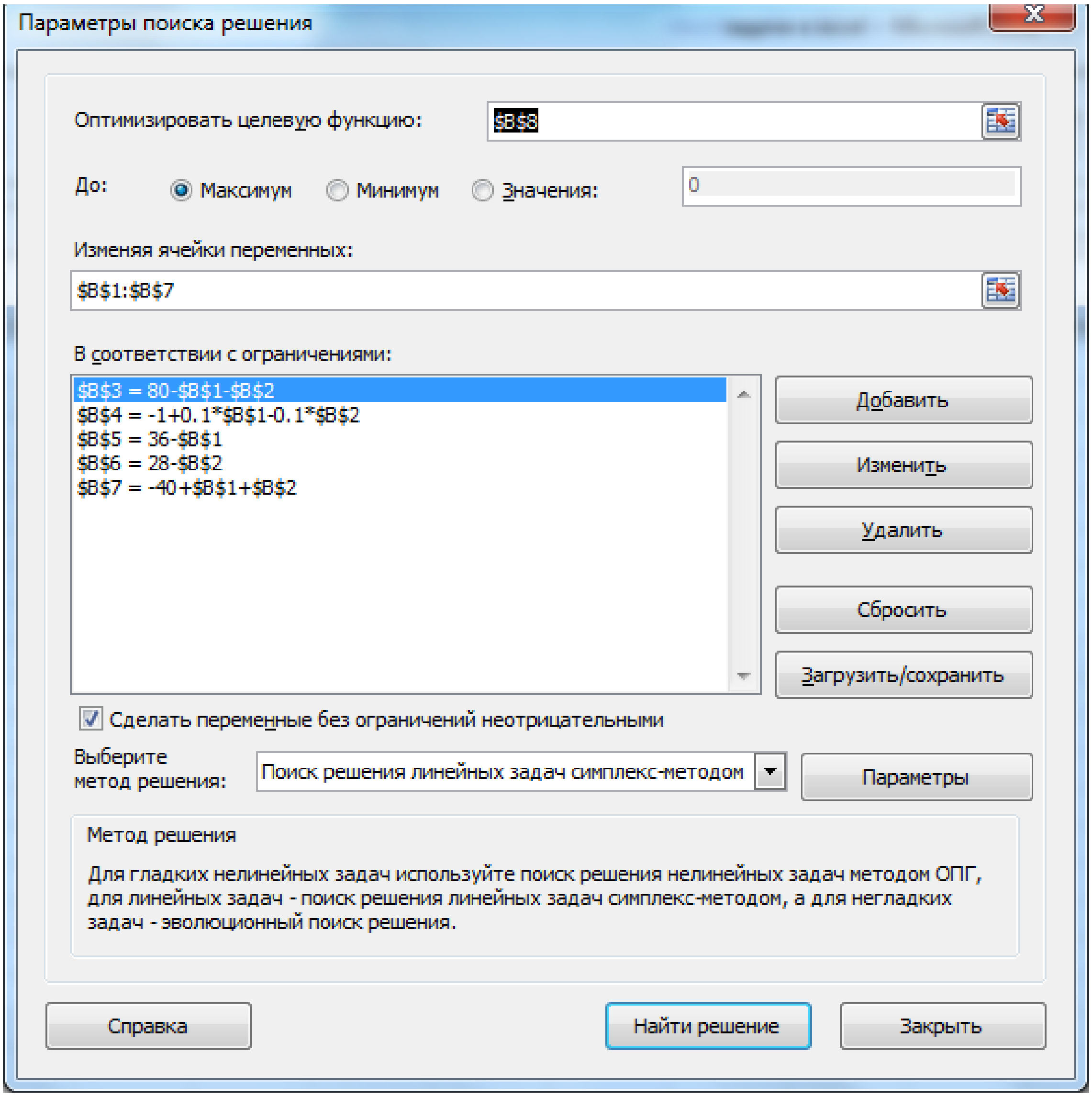


Рис. А.5. Вікно «Параметри пошуку рішення» для задачі про розподіл вагонів

Після введення даних необхідно натиснути кнопку «Знайти рішення». Значення змінних та цільової функції, що відповідають оптимальному розв'язку задачі, буде виведено у відповідних клітинках на листі електронної таблиці (рис. А.6).

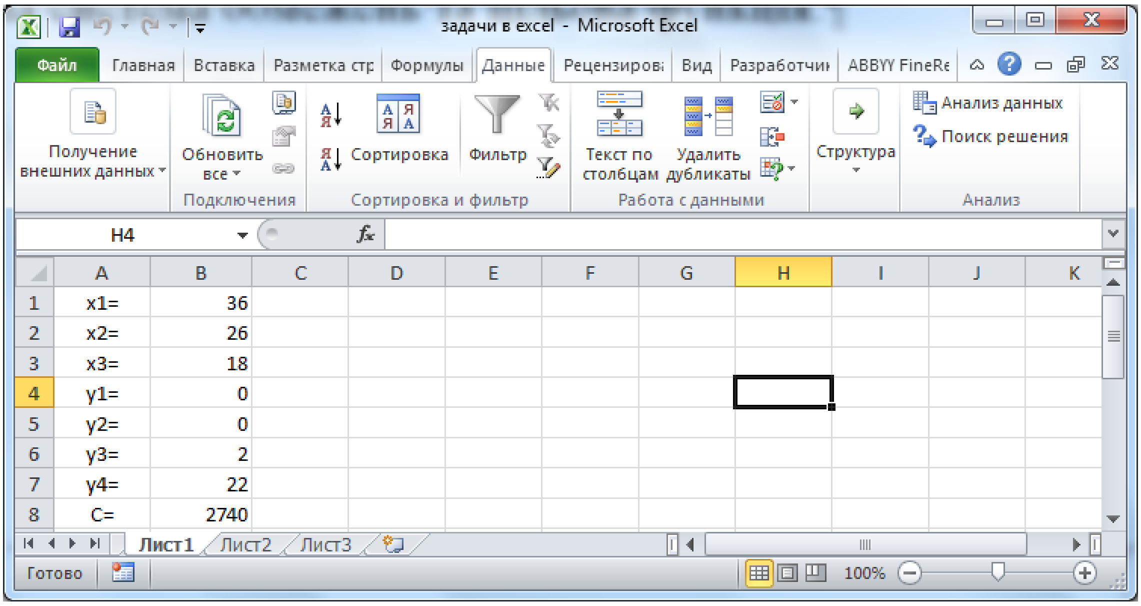


Рис. А.6. Розв'язок задачі про розподіл вагонів

Отримані значення змінних ($x_1 = 36$, $x_2 = 26$, $x_3 = 18$, $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 2$, $y_4 = 22$) та цільової функції ($C = 2\,740$) відповідають оптимальному розв'язку та збігаються з результатами розв'язання цієї задачі графічним методом (див. п. 2.3) та симплекс-методом (див. п. 3.2).

Транспортна задача. Розв'яжемо транспортну задачу, умови якої задано в п. 5.2. На листі редактора MS Excel підготуємо дві таблиці (рис. А.7): розрахункову таблицю (з урахуванням фіктивного пункту призначення $B_ф$) та матрицю вартостей (див. табл. 5.6).

У клітинку B11 введемо вираз для розрахунку цільової функції. У транспортній задачі цільова функція представляє собою загальні витрати на перевезення, тобто суму добутків величини перевезення x_{ij} на відповідну вартість c_{ij} ($i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$). Для розрахунку цільової функції доцільно скористатись функцією СУММПРОИЗВ(масив1; масив2; …масивN), яка перемножує відповідні елементи заданих масивів і визначає суму цих добутків. В даному випадку перший масив включає діапазон клітинок B3:F7, призначених для розрахунку величини перевезень x_{ij}, другий масив включає діапазон клітинок K3:O7, що відповідає матриці вартості. Таким чином, у клітинку B11 потрібно ввести формулу «= СУММПРОИЗВ(B3:F7; K3:O7)».

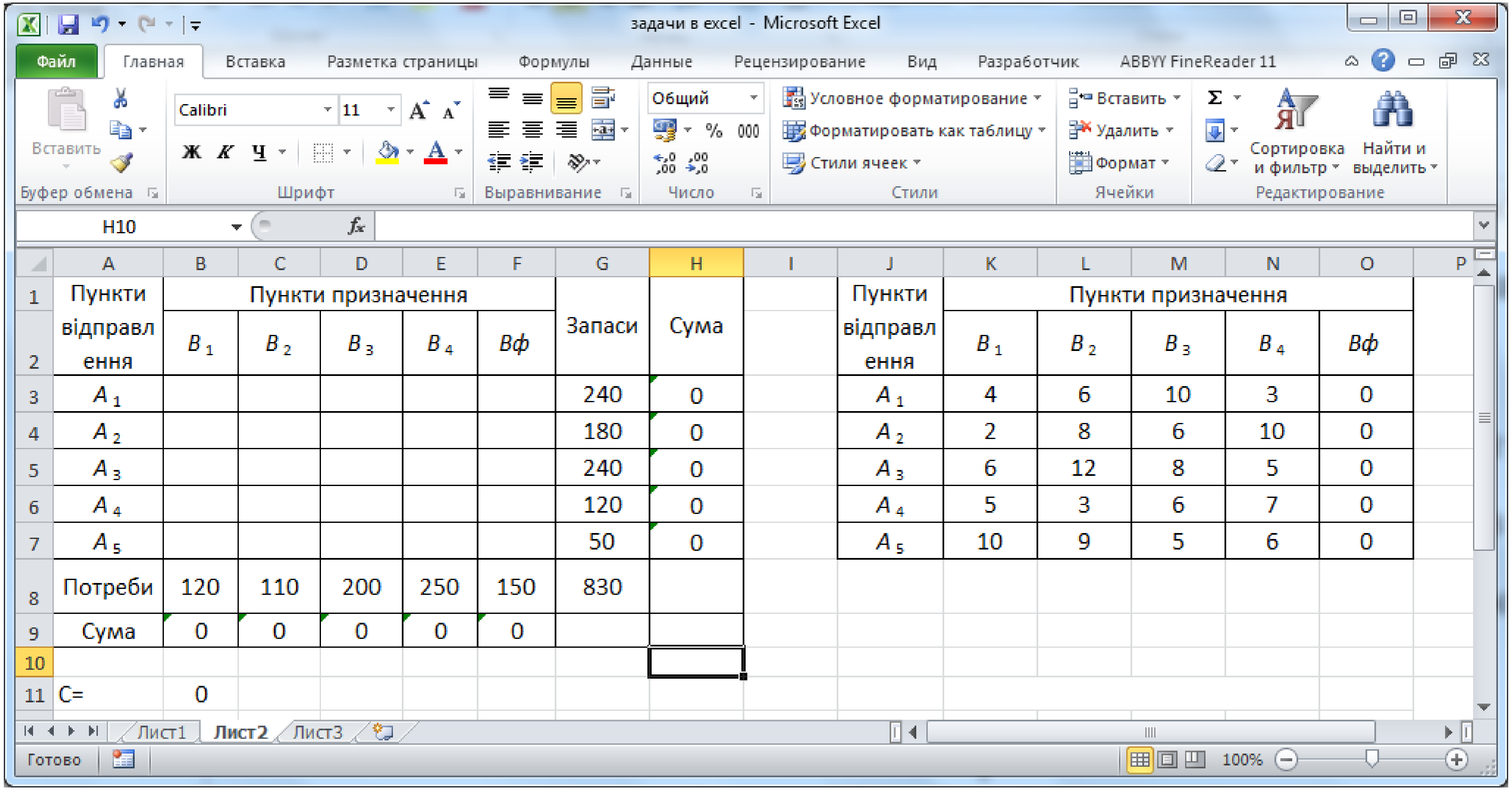


Рис. А.7. Таблиці MS Excel до транспортної задачі

Для контролю балансових умов транспортної задачі у клітинки H3…H7 необхідно ввести формули для розрахунку сум перевезень по рядках транспортної таблиці (по кожному пункту відправлення A_i). Так, у клітинку H3 вводимо вираз «= СУММ(B3:F3)», в клітинку H4 – «= СУММ(B4:F4)» і т. д. Аналогічно у клітинки B9…F9 вводяться формули для розрахунку сум перевезень по стовпчиках таблиці (по кожному пункту призначення B_j): у клітинку B9 вводиться вираз «= СУММ(B3:B7)», в клітинку C9 – «= СУММ(C3:C7)» і т. д.

Після натискання кнопки «Пошук рішення» (див. рис. А.1) у діалоговому вікні «Параметри пошуку рішення» вводимо необхідні дані (рис. А.8): оптимізувати цільову функцію у клітинці з адресою «$B$11» до «Мінімуму», змінюючи клітини «$B$3:$F$7».

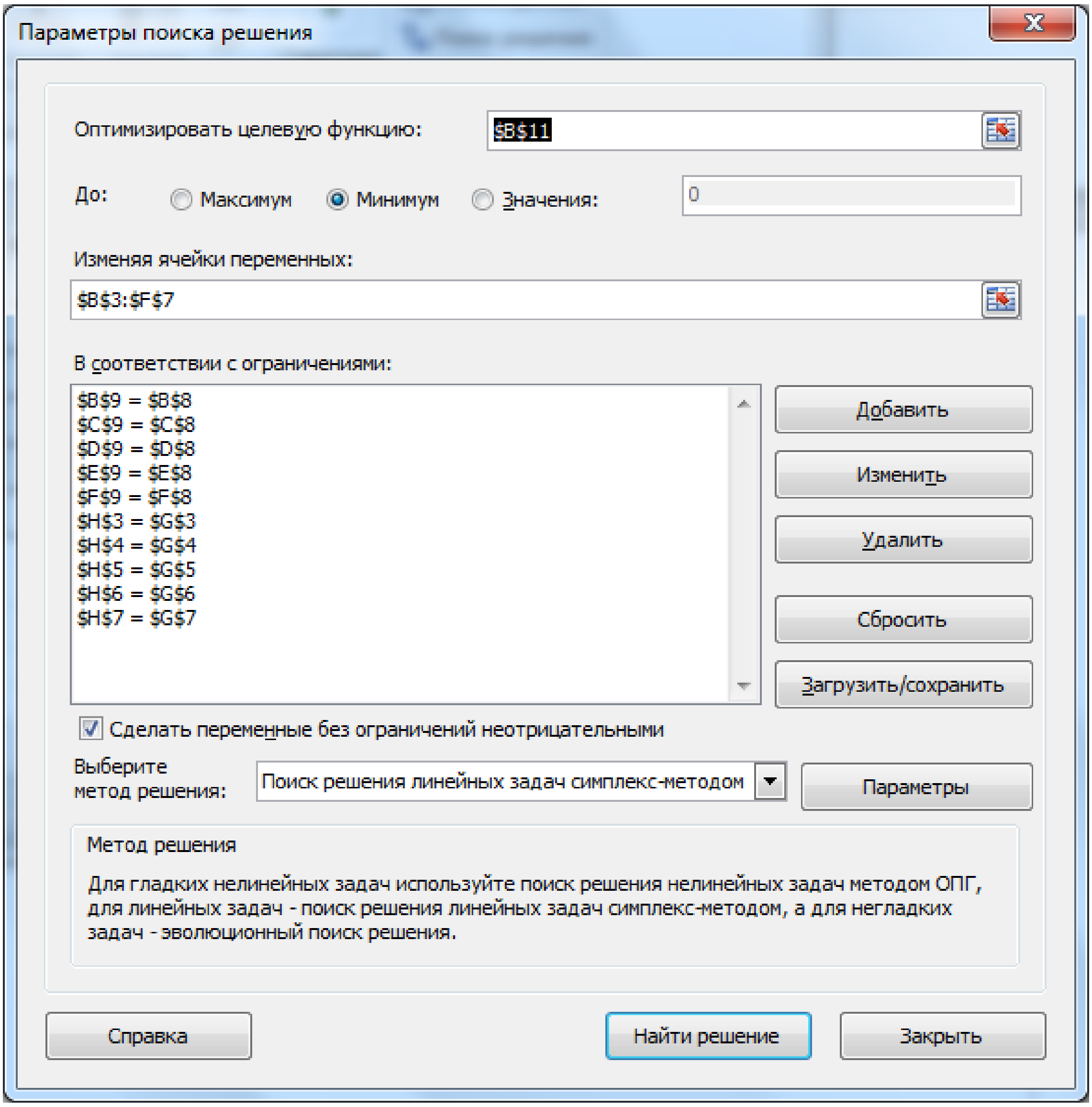
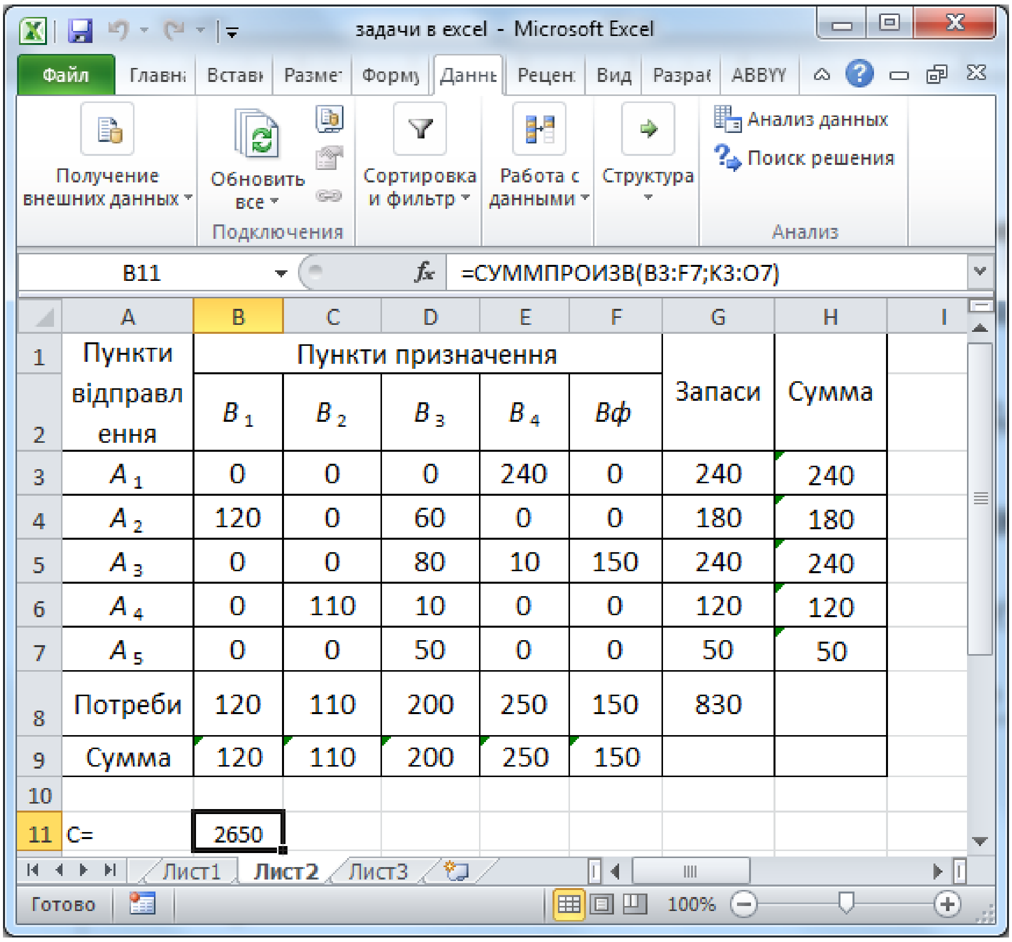


Рис. А.8. Вікно «Параметри пошуку рішення» для транспортної задачі

Обмеження транспортної задачі (балансові умови) вводяться за допомогою діалогового вікна «Додавання обмеження» (див. рис. А.4). Так, для пункту відправлення A_1 необхідно ввести обмеження «\$H\$3 = \$G\$3», тобто сума перевезень, що направляються з пункту A_1 (клітинка H3), повинна дорівнювати запасам вантажу (240 одиниць) у цьому пункті відправлення (клітинка G3), для пункту A_2 вводиться обмеження ««\$H\$4 = \$G\$4» і т. д. Аналогічним чином вводяться обмеження для усіх пунктів призначення (див. рис. А.8). Так для пункту B_1 вводиться обмеження «\$B\$9 = \$B\$8», тобто сума перевезень, що направляються у пункт B_1 (клітинка B9), повинна дорівнювати потребам вантажу (120 одиниць) у цьому пункті відправлення (клітинка B8), для пункту B_2 вводиться обмеження «\$C\$9 = \$C\$8» і т. д.

Як метод розв'язання обирається симплекс-метод. Вікно «Параметри пошуку рішення» з заповненими полями наведене на рис. А.8.

Після введення даних необхідно натиснути кнопку «Знайти рішення». Значення перевезень x_{ij}, що відповідають оптимальному розв'язку задачі, будуть виведені у відповідних клітинках (B3:F7) на листі електронної таблиці, а відповідне значення цільової функції – у клітинці B11 (рис. А.9).



Пункти відправлення	Пункти призначення					Запаси	Сумма
	B_1	B_2	B_3	B_4	$B\phi$		
A_1	0	0	0	240	0	240	240
A_2	120	0	60	0	0	180	180
A_3	0	0	80	10	150	240	240
A_4	0	110	10	0	0	120	120
A_5	0	0	50	0	0	50	50
Потреби	120	110	200	250	150	830	
Сумма	120	110	200	250	150		
C=	2650						

Рис. А.9. Розв'язок транспортної задачі

Отримані значення перевезень x_{ij} та цільової функції ($C = 2\,650$) відповідають оптимальному розв'язку та збігаються з результатами розв'язання цієї задачі методом потенціалів (див. рис. 5.6).

Задача про призначення. Розв'яжемо задачу про закріплення локомотивних бригад до составів пасажирських поїздів, умови якої задано в п. 8.2. На листі редактора MS Excel підготуємо дві таблиці (рис. А.10): розрахункову таблицю та матрицю вартостей (див. табл. 8.3).

Задача про призначення є різновидом транспортної задачі, тому порядок її розв'язання в MS Excel аналогічний. У клітинку B11 введемо вираз для розрахунку цільової функції «= СУММПРОИЗВ(B2:H8; L2:R8)» – сума добутків змінних x_{ij} (діапазон клітинок B2:H8) на відповідні значення матриці вартості (діапазон клітинок L2:R8).

Змінні x_{ij} у задачі про призначення можуть набувати значень 1 (якщо *i*-та робота закріплена за *j*-м виконавцем) або 0 (у протилежному випадку). Окрім того, балансові умови задачі передбачають, що кожна робота може бути закріплена тільки за одним виконавцем, а кожен виконавець – тільки за однією роботою. Це означає, що в кожному стовпчику та рядку розрахункової матриці має бути тільки по одному значенню $x_{ij} = 1$, іншим словами – сума x_{ij} по кожному рядку та по кожному стовпчику матриці має дорівнювати одиниці. Для контролю балансових умов у клітинки I2…I8 записуються формули для розрахунку сум x_{ij} по рядкам розрахункової матриці (наприклад, для клітинки I – «= СУММ(B2:H2)», а у клітинки B9…H9 – формули для розрахунку сум x_{ij} по стовпчикам (наприклад, для клітинки B2 – «= СУММ(B2:B8)».

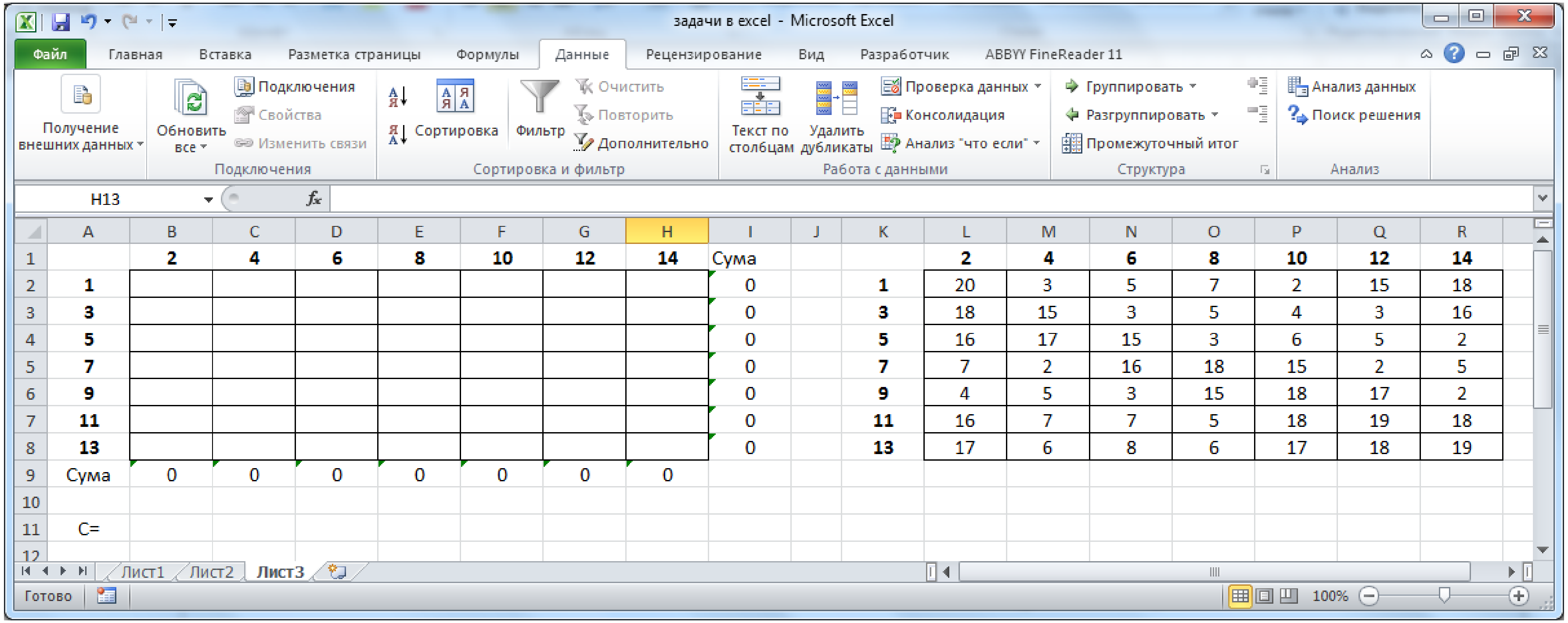
Після натискання кнопки «Пошук рішення» у діалоговому вікні «Параметри пошуку рішення» вводимо необхідні дані (рис. А.11): оптимізувати цільову функцію у клітинці з адресою «$B$11» до «Мінімуму», змінюючи клітини «$B$2:$H$8».

Обмеження транспортної задачі (балансові умови) вводяться за допомогою діалогового вікна «Додавання обмеження» (див. рис. А.4). При цьому суми x_{ij} у клітинках I2…I8 (по рядкам) та у клітинках B9…H9 (по стовпчикам) прирівнюються до одиниці (див. рис. А.11).

У якості методу розв'язання обирається симплекс-метод. Вікно «Параметри пошуку рішення» з заповненими полями наведене на рис. А.11.

Після уведення даних необхідно натиснути кнопку «Знайти рішення». Значення x_{ij}, що відповідають оптимальному розв'язку задачі, будуть виведені у відповідних клітинках (B2:H8) на листі електронної таблиці, а відповідне значення цільової функції – у клітинці B11 (рис. А.12).

Отримані значення x_{ij} та цільової функції ($C = 24$) відповідають оптимальному розв'язку та збігаються з результатами розв'язання цієї задачі методом Мака (див. табл. 8.4).



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
1		2	4	6	8	10	12	14	Сума			2	4	6	8	10	12	14
2	1								0		1	20	3	5	7	2	15	18
3	3								0		3	18	15	3	5	4	3	16
4	5								0		5	16	17	15	3	6	5	2
5	7								0		7	7	2	16	18	15	2	5
6	9								0		9	4	5	3	15	18	17	2
7	11								0		11	16	7	7	5	18	19	18
8	13								0		13	17	6	8	6	17	18	19
9	Сума	0	0	0	0	0	0	0										
10																		
11	C=																	

Рис. А.10. Таблиці MS Excel до задачі про призначення

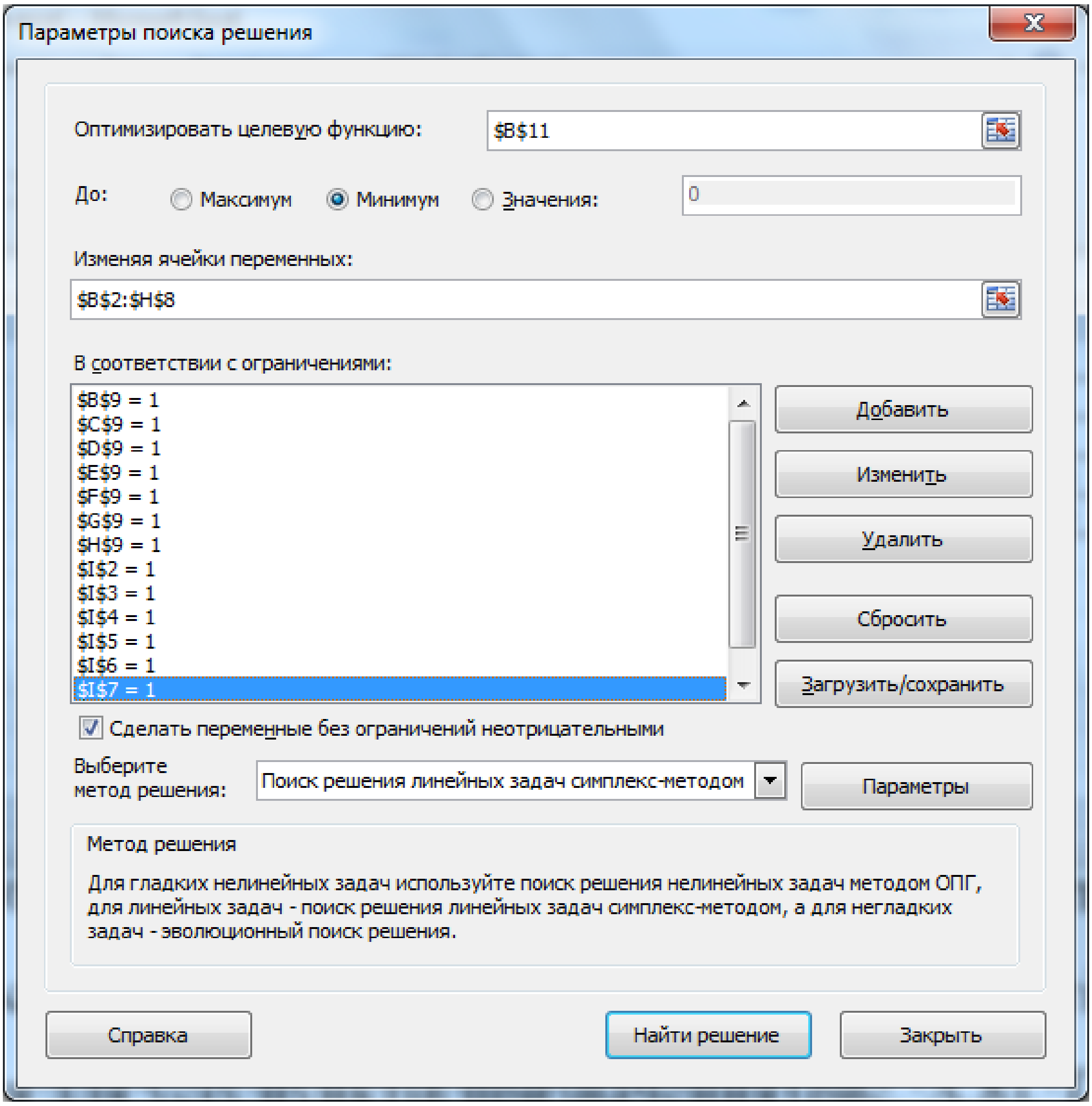


Рис. А.11. Вікно «Параметри пошуку рішення» для задачі про призначення

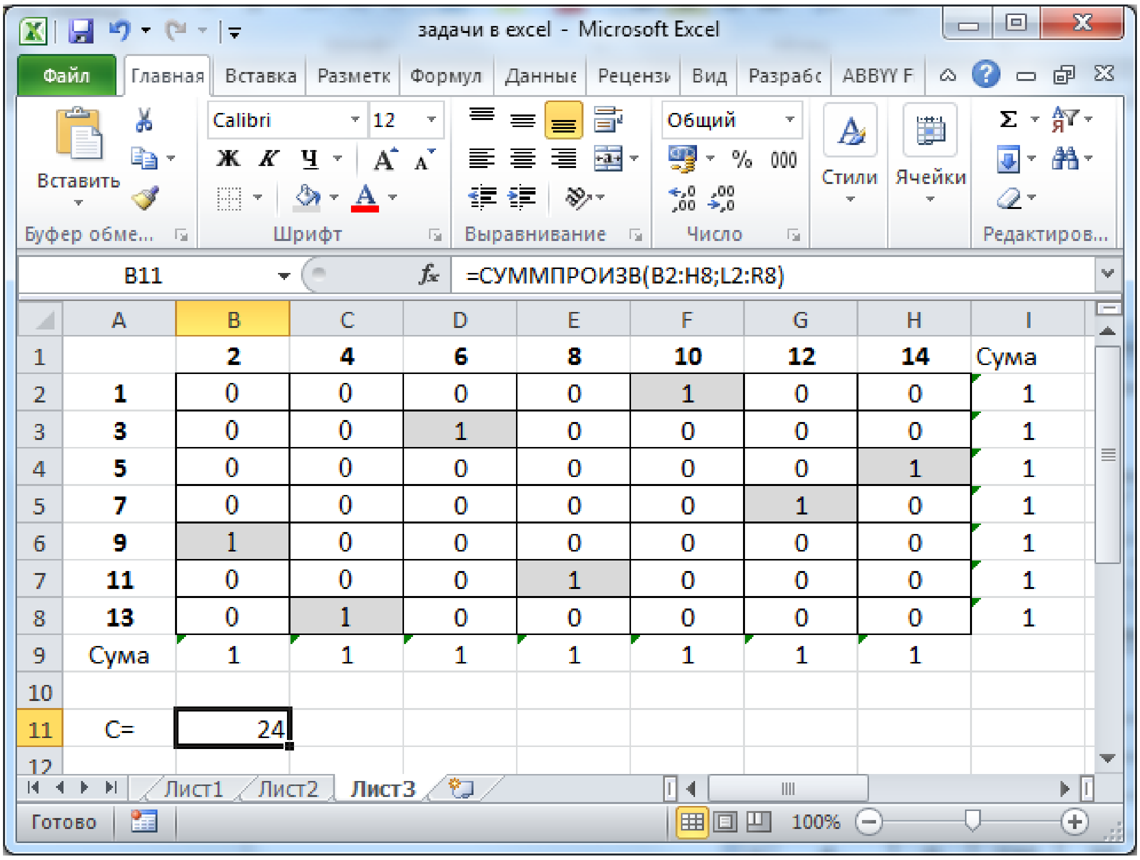


Рис. А.12. Розв’язок задачі про призначення

Для нотаток

Навчальне видання

Козаченко Дмитро Миколайович
Вернигора Роман Віталійович
Малашкін Вячеслав Віталійович

Основи дослідження операцій у транспортних системах: приклади та задачі

Навчальний посібник для ВНЗ

Редактор *О. О. Котова*
Комп'ютерна верстка *О. М. Гончаренко*

Формат 60×84 $^1/_{16}$. Ум. друк. арк. 16,15. Обл.-вид. арк. 16,21.
Тираж 300 пр. Зам. №

Дніпропетровський національний університет
залізничного транспорту імені академіка В. Лазаряна
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 1315 від 31.03.2003 р.

Адреса видавця та дільниці оперативної поліграфії:
Дніпропетровський національний університет
залізничного транспорту імені академіка В. Лазаряна,
вул. Лазаряна, 2, Дніпропетровськ, 49010