



Точная константа в неравенстве Джексона с модулем гладкости для равномерных приближений периодических функций

С. А. Пичугов

Доказано, что в пространстве $C_{2\pi}$ для всех $k, n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, выполняются неравенства

$$\left(1 - \frac{1}{2n}\right) \frac{k^2 + 1}{2} \leq \sup_{\substack{f \in C_{2\pi} \\ f \neq \text{const}}} \frac{e_{n-1}(f)}{\omega_2(f, \pi/(2nk))} \leq \frac{k^2 + 1}{2}.$$

где $e_{n-1}(f)$ – наилучшее приближение f тригонометрическими полиномами, $\omega_2(f, h)$ – модуль гладкости f . Аналогичный результат получен и для аппроксимации непрерывными ломаными с равноотстоящими узлами.

Библиография: 12 названий.

DOI: 10.4213/mzm10245

Пусть

- $C_{2\pi}$ – пространство (2π) -периодических действительнозначных непрерывных функций с нормой $\|f\| = \max\{|f(x)| : x \in \mathbb{R}\}$;
- $e_{n-1}(f) = \inf_{T_{n-1}} \|f - T_{n-1}\|$ – наилучшее приближение f в этом пространстве тригонометрическими полиномами T_{n-1} степени не выше $n - 1$, $n \in \mathbb{N}$;
- $\omega_2(f, h) = \sup_{|t| \leq h} \|\Delta_t^2 f\|$ – значение модуля гладкости f в точке h , $h \geq 0$, где $\Delta_t^2 f(x) = f(x + t) + f(x - t) - 2f(x)$ – вторая разность f в точке x с шагом t .

ТЕОРЕМА 1. Для всех $k, n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, выполняются неравенства

$$\left(1 - \frac{1}{2n}\right) \frac{k^2 + 1}{2} \leq \sup_{\substack{f \in C_{2\pi} \\ f \neq \text{const}}} \frac{e_{n-1}(f)}{\omega_2(f, \pi/(2nk))} \leq \frac{k^2 + 1}{2}. \quad (1) \quad \{\text{eq1}\}$$

СЛЕДСТВИЕ 1. Для всех $k \in \mathbb{N}$ справедливы соотношения:

$$\sup_n \sup_{\substack{f \in C_{2\pi} \\ f \neq \text{const}}} \frac{e_{n-1}(f)}{\omega_2(f, \pi/(2nk))} = \frac{k^2 + 1}{2}.$$

Оценки сверху наилучших приближений функций в терминах значений их модулей непрерывности различных порядков называют неравенствами Джексона. Известные результаты по точным неравенствам Джексона (т.е. неравенствам с наилучшаемыми константами) для функций одной переменной можно найти в работах [1]–[8]. В частности, неравенства (1) в случае $k = 1$ были доказаны в [9], [10] (оценка сверху) и [6] (оценка снизу). Отметим также работу [11], в которой получены оценки сверху точных констант для других значений аргумента модуля гладкости.

Пусть M – произвольное подпространство в $C_{2\pi}$, содержащее константы,

$$e(f; M) = \inf\{\|f - g\| : g \in M\}$$

– наилучшее приближение f подпространством M ,

$$\mathcal{W}^2 = \{f \in C_{2\pi} : f' \in AC, f'' \in C_{2\pi}, \|f''\| \leq 1\},$$

$e(\mathcal{W}^2; M)$ – наилучшее приближение класса $\mathcal{W}^2$ подпространством M .

ЛЕММА 1. 1) Для любой f из $C_{2\pi}$ справедливо неравенство

$$e(f; M) \leq \frac{1}{2} \inf_{h>0} \left(1 + \frac{2e(\mathcal{W}^2; M)}{h^2} \right) \omega(f, h); \quad (2) \quad \{\text{eq2}\}$$

2) для любого $\delta > 0$ выполняются неравенства

$$\frac{\delta^2}{2} \leq \sup_{\substack{f \in C_{2\pi} \\ f \neq \text{const}}} \frac{e(f; M)}{\omega_2(f, (2e(\mathcal{W}^2; M))^{1/2}/\delta)} \leq \frac{\delta^2 + 1}{2}. \quad (3) \quad \{\text{eq3}\}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. Пусть для $h > 0$

$$\mathcal{S}_h(f, x) = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} f(x+t) dt$$

– среднее Стеклова f с шагом h ,

$$\mathcal{S}_{h^2}(f, x) := \mathcal{S}_h(\mathcal{S}_h f, x) = \frac{1}{h^2} \int_{-h}^h (h - |t|) f(x+t) dt$$

– среднее Стеклова f второго порядка. Тогда

$$\begin{aligned} |f(x) - \mathcal{S}_{h^2}(f, x)| &\leq \frac{1}{h^2} \int_0^h (h-t) |\Delta_t^2 f(x)| dt, \\ \|f - \mathcal{S}_{h^2} f\| &\leq \frac{1}{h^2} \int_0^h (h-t) \omega_2(f, t) dt \leq \frac{1}{2} \omega_2(f, h). \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} \|D^2(\mathcal{S}_{h^2} f)\| &= \left\| \frac{\Delta_h^2 f}{h^2} \right\| \leq \frac{\omega_2(f, h)}{h^2}, \\ e(\mathcal{S}_{h^2} f; M) &\leq \frac{1}{h^2} \omega_2(f, h) e(\mathcal{W}^2; M). \end{aligned}$$

Теперь для оценки сверху приближения $e(f; M)$ используем промежуточное приближение f более гладкими функциями $\mathcal{S}_{h^2} f$:

$$e(f; M) \leq \|f - \mathcal{S}_{h^2} f\| + e(\mathcal{S}_{h^2} f; M) \leq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2}{h^2} e(\mathcal{W}^2; M) \right) \omega_2(f, h). \tag{4} \quad \{\text{eq4}\}$$

Ввиду произвольности значения h отсюда получаем (2). Отметим, что таким методом оценка (4) для приближений полиномами получена в [9].

Если в (4) положить $h = (2e(\mathcal{W}^2; M))^{1/2}/\delta$, то получим оценку сверху в (3). Для оценки снизу в (3) ограничимся приближением гладких функций f из $C_{2\pi}$ и используем неравенство $\omega_2(f, h) \leq \|f''\| h^2$.

Лемма 1 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. В случае приближения тригонометрическими полиномами по теореме Ахиезера–Крейна–Фавара (см., например, [7])

$$\sup_{f \in \mathcal{W}^2} e_{n-1}(f) = \frac{\pi^2}{8n^2}, \tag{5} \quad \{\text{eq5}\}$$

и тогда оценка сверху в (3) имеет вид

$$\sup_{\substack{f \in C_{2\pi} \\ f \neq \text{const}}} \frac{e_{n-1}(f)}{\omega_2(f, \pi/(2n\delta))} \leq \frac{\delta^2 + 1}{2}. \tag{6} \quad \{\text{eq6}\}$$

Покажем, что при $\delta \in \mathbb{N}$ это оценка сразу для всех n неулучшаема.

Для оценки констант Джексона снизу при построении следующих функций используется идея Корнейчука [1], [2], которая для модулей гладкости при $\delta = 1$ реализована в [6].

Фиксируем

$$k, n \in \mathbb{N}, \quad n > 1, \quad \varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2}\right],$$

и положим

$$x_0 = 0, \quad x_\nu = \nu h - (n - \nu)\beta, \quad \nu = 1, \dots, n, \quad h = \frac{\pi}{n}, \quad \beta \in \left(0, \frac{4\varepsilon}{n^2(k^2 + 1)}\right).$$

По построению

$$x_{\nu+1} - x_\nu = h + \beta, \quad x_n = \pi.$$

Рассмотрим произвольную функцию f из $C_{2\pi}$, удовлетворяющую условиям

$$f(-x) = f(x), \quad f(0) = 0, \quad f(x_\nu) = (-1)^{\nu+1} \frac{k^2 + 1}{2}, \quad \nu = 1, \dots, n. \tag{7} \quad \{\text{eq7}\}$$

Для оценки снизу $e_{n-1}(f)$ используем полином

$$T_{n-1}(x) = \frac{k^2 + 1}{2n} \frac{\sin(n - 1/2)x}{2 \sin(x/2)}.$$

Так как (см. [1], [2]) для $\nu = 0, 1, \dots, n$

$$f(x_\nu) - T_{n-1}(x_\nu) = (-1)^{\nu+1} \left(\frac{k^2 + 1}{2} - \frac{k^2 + 1}{4n} \right) + \mu_\nu,$$

где $|\mu_\nu| < \varepsilon$, то ввиду четности f по теореме Валле-Пуссена

$$e_{n-1}(f) \geq \frac{k^2 + 1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n}\right) - \varepsilon. \quad (8) \quad \text{\texttt{eq8}}$$

Определим теперь функцию $f(x)$ на всей оси так, чтобы наряду с условиями (7) выполнялось еще условие

$$\omega_2\left(f, \frac{\pi}{2nk}\right) = 1. \quad (9) \quad \text{\texttt{eq9}}$$

Построим сначала $f(x)$ на отрезке $[x_1, \gamma]$, где $\gamma = (3/2)(h + \beta) - n\beta$ – середина отрезка $[x_1, x_2]$, определив ее в виде ломаной, которая однозначно определяется своими значениями в узлах:

$$\begin{aligned} f(\gamma) &= 0, & f\left(x_1 + j\frac{h}{2k}\right) &= \frac{k^2 + 1}{2} - \frac{j^2}{2}, & j &= 0, \dots, k, \\ f\left(x_1 + j\frac{h}{2k} + \frac{\beta}{2}\right) &= \frac{k^2 + 1}{2} - \frac{(j+1)^2}{2}, & j &= 0, \dots, k-1. \end{aligned} \quad (10) \quad \text{\texttt{eq10}}$$

Продолжим $f(x)$ на отрезок $[\gamma, x_2]$ нечетным образом относительно точки γ :

$$f(\gamma + x) = -f(\gamma - x), \quad x \in \left[0, \frac{x_2 - x_1}{2}\right]. \quad (11) \quad \text{\texttt{eq11}}$$

Далее положим

$$\begin{aligned} f(x) &= -f(x - h - \beta), & x &\in [x_2, \pi], \\ f(x) &= \max\{0; f(2x_1 - x)\}, & x &\in [0, x_1], \\ f(-x) &= f(x), & x &\in [-\pi; 0], \\ f(x + 2\pi) &= f(x). \end{aligned} \quad (12) \quad \text{\texttt{eq12}}$$

Этим определена непрерывная 2π -периодическая функция, удовлетворяющая условиям (7). Легко видеть, что условие (9) также выполняется: так как $f(x)$ – ломаная, то при вычислении ее модуля гладкости достаточно вычислить приращения f в ее узлах.

Ввиду произвольности ε из (8) и (9) следует оценка снизу константы Джексона в (1).

Теорема 1 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. При доказательстве леммы 1 специфика метрики $C_{2\pi}$ не использовалась; в частности, соотношения (3) справедливы и в пространстве $L_1[0, 2\pi]$. Далее, аналог теоремы Ахиезера–Крейна–Фавара (5) справедлив и в $L_1[0, 2\pi]$ (см., например, [7]). Поэтому в пространстве $L_1[0, 2\pi]$ имеет место оценка сверху, аналогичная (6):

$$\sup_{\substack{f \in L_1[0, 2\pi] \\ f \neq \text{const}}} \frac{e_{n-1}(f)_{L_1}}{\omega_2(f, \pi/(2n\delta))_{L_1}} \leq \frac{\delta^2 + 1}{2}.$$

Однако нам не известны точные значения констант Джексона для модулей гладкости в этом пространстве ни при каком $\delta > 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Пусть $X_{n-1,2}(f)$ – суммы Фавара степени $n - 1$ порядка 2 для функции f (см., например, [7]). Тогда

$$\widetilde{\mathcal{L}}_{n-1}(f) := \mathcal{S}_{(\pi/(2nk))^2} \circ X_{n-1,2}(f)$$

– наилучший линейный метод приближения функций среди всех линейных полиномиальных методов $\mathcal{L}_{n-1}$ в том смысле, что для любого $k \in \mathbb{N}$

$$\sup_n \inf_{\mathcal{L}_{n-1}} \sup_{\substack{f \in C_{2\pi} \\ f \neq \text{const}}} \frac{\|f - \mathcal{L}_{n-1}(f)\|}{\omega_2(f, \pi/(2nk))} = \sup_n \sup_{\substack{f \in C_{2\pi} \\ f \neq \text{const}}} \frac{\|f - \widetilde{\mathcal{L}}_{n-1}(f)\|}{\omega_2(f, \pi/(2nk))} = \frac{k^2 + 1}{2}.$$

Это сразу следует из доказательства оценки сверху в теореме 1 и того факта (см., например, [7]), что

$$e_{n-1}(\mathcal{W}^2) = \sup_{f \in \mathcal{W}^2} \|f - X_{n-1,2}(f)\|.$$

Легко вычислить множители метода $\widetilde{\mathcal{L}}_{n-1}$: если f_ν – комплексные коэффициенты Фурье f , и

$$\widetilde{\mathcal{L}}_{n-1}(f, x) = \sum_{|\nu| < n} \alpha_k\left(\frac{\nu}{n}\right) f_\nu e^{i\nu x},$$

то

$$\alpha_k(t) = 4k^2 \left(\sin \frac{\pi}{4k} t \right)^2 \frac{\cos(\pi t/2)}{(\sin(\pi t/2))^2}, \quad |t| \leqslant 1.$$

В частности (см. [9], [10], [6]),

$$\alpha_1(t) = 1 - \left(\tan \frac{\pi}{4} t \right)^2, \quad \alpha_2(t) = \frac{1 - (\tan(\pi t/4))^2}{(\cos(\pi t/8))^2}.$$

Рассмотрим еще приближение функций подпространством $\mathcal{S}_{2n}$ периодических непрерывных ломаных с $2n$ равноотстоящими узлами

$$y_\nu = \frac{\pi}{2n} + \frac{\nu\pi}{n}, \quad \nu \in \mathbb{Z},$$

на периоде $[-\pi, \pi]$.

ТЕОРЕМА 2. Для всех $k, n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, выполняются неравенства

$$\left(1 - \frac{1}{2n}\right) \frac{k^2 + 1}{2} \leqslant \sup_{\substack{f \in C_{2\pi} \\ f \neq \text{const}}} \frac{e(f; \mathcal{S}_{2n})}{\omega_2(f, \pi/(2nk))} \leqslant \frac{k^2 + 1}{2}. \tag{13} \quad \text{\texttt{feq13}}$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Для всех $k \in \mathbb{N}$ справедливы соотношения

$$\sup_n \sup_{\substack{f \in C_{2\pi} \\ f \neq \text{const}}} \frac{e(f; \mathcal{S}_{2n})}{\omega_2(f, \pi/(2nk))} = \frac{k^2 + 1}{2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как (см. [11])

$$e(\mathcal{W}^2; \mathcal{S}_{2n}) = \frac{\pi^2}{8n^2},$$

то оценка сверху в (13) следует из (3).

Для оценки снизу рассмотрим приближение функции f , построенной при доказательстве теоремы 1 (см. (7), (10)–(12)). Будем использовать соотношение двойственности для аппроксимации сплайнами минимального дефекта [12], которое в нашем частном случае можно представить в виде:

$$e(f; \mathcal{S}_{2n}) = \sup \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dg_1(x) : \text{Var } g_1(x) \leq 1, g_2(y_\nu) = \text{const}, \nu \in \mathbb{Z} \right\}, \quad (14) \quad \text{eq14}$$

где $g_2(x)$ – первообразная $g_1(x)$, в среднем равная нулю, $\text{Var } g_1(x)$ – вариация $g_1(x)$ на периоде.

Для оценки снизу $e(f; \mathcal{S}_{2n})$ построим кусочно-постоянную функцию $g_1(x)$ следующим образом: сначала определим на периоде $[-\pi, \pi]$ вспомогательную функцию $\psi(x)$ как четную непрерывную ломаную с нулями в точках y_ν и вершинами в точках x_ν .

Пусть для $x \in [0, \pi]$

$$\psi(x) := c_\nu(x - y_\nu), \quad x \in [x_{\nu-1}, x_\nu], \quad \nu = 1, \dots, n.$$

Условие непрерывности в точке $x_{\nu+1}$ означает, что

$$c_{\nu+1} = -c_\nu \frac{\pi/(2n) - (n - (\nu + 1))\beta}{\pi/(2n) + (n - (\nu + 1))\beta}.$$

Положим $c_1 = -1$, тогда для $\nu = 2, \dots, n$

$$c_\nu = (-1)^\nu \prod_{j=1}^{\nu-1} \frac{\pi/(2n) - (n - j)\beta}{\pi/(2n) + (n - j)\beta}. \quad (15) \quad \text{eq15}$$

Функция $\psi'(x)$ кусочно постоянная и

$$\text{Var } \psi'(x) = 4 \sum_{\nu=1}^n |c_\nu|.$$

Положим

$$g_2(x) = \frac{\psi(x) - \psi_0}{4 \sum_{\nu=1}^n |c_\nu|},$$

где

$$\psi_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(x) dx.$$

Тогда $g_2(x)$ в среднем равна нулю, $g_2(y_\nu) = \text{const}$, $\nu \in \mathbb{Z}$, и $\text{Var } g_1(x) = 1$. Так как

$$|c_\nu - c_{\nu+1}| = |c_\nu| + |c_{\nu+1}|,$$

(см. (15)), из (14) следует, что

$$\begin{aligned} e(f; \mathcal{S}_{2n}) &\geq \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dg_1(x) = \frac{1}{4 \sum_{\nu=1}^n |c_{\nu}|} 2 \left(\sum_{\nu=1}^{n-1} |c_{\nu} - c_{\nu+1}| + |c_n| \right) \frac{k^2 + 1}{2} \\ &= \frac{1}{4 \sum_{\nu=1}^n |c_{\nu}|} \left(4 \sum_{\nu=1}^n |c_{\nu}| - 2|c_1| \right) \frac{k^2 + 1}{2} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2 \sum_{\nu=1}^n |c_{\nu}|} \right) \frac{k^2 + 1}{2}. \end{aligned}$$

Из (15) видно, что $|c_{\nu}| \rightarrow 1$ при $\beta \rightarrow 0$. Отсюда следует оценка снизу в (13). Теорема 2 доказана.

Вполне возможно, что утверждение теоремы 2 остается справедливым в случае приближения сплайнами минимального дефекта и любого порядка $r \in \mathbb{N}$. При этом оценка сверху в (13) выполняется, и достаточно только доказать оценку снизу.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Н. П. Корнейчук, “Точная константа в теореме Джексона о наилучшем равномерном приближении непрерывных периодических функций”, *ДАН СССР*, **145**:3 (1962), 514–515.
- [2] Н. П. Корнейчук, “О точной константе в неравенстве Джексона для непрерывных периодических функций”, *Матем. заметки*, **32**:5 (1982), 669–674.
- [3] Н. И. Черных, “О неравенстве Джексона в L_2 ”, *Приближение функций в среднем*, Сборник работ, Тр. МИАН СССР, **88**, 1967, 71–74.
- [4] Н. И. Черных, “О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2 ”, *Матем. заметки*, **2**:5 (1967), 513–522.
- [5] Н. И. Черных, “Неравенство Джексона в $L_p(0, 2\pi)$ ($1 \leq p < 2$) с точной константой”, *Труды Всесоюзной школы по теории функций* (Миасс, июль 1989 г.), Тр. МИАН, **198**, Наука, М., 1992, 232–241.
- [6] В. В. Шалаев, “К вопросу о приближении непрерывных периодических функций тригонометрическими полиномами”, *Исследования по современным проблемам суммирования и приближения функций и их приложения*, Днепропетровск. ун-т, Днепропетровск, 1979, 39–43.
- [7] Н. П. Корнейчук, *Точные константы в теории приближения*, Наука, М., 1987.
- [8] А. А. Лигун, “Точные константы в неравенствах типа Джексона”, *Специальные вопросы теории приближений и оптимального управления распределенными системами*, Вища школа, Киев, 1990, 3–74.
- [9] В. В. Жук, “О некоторых неравенствах между наилучшими приближениями и модулями непрерывности”, *Вестн. Ленинградск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., астроном.*, 1974, № 1, 21–26.
- [10] В. В. Жук, *Аппроксимация периодических функций*, Изд-во Ленинградск. ун-та, Ленинград, 1982.
- [11] А. Г. Бабенко, Ю. В. Крякин, “Интегральное приближение характеристической функции интервала и неравенство Джексона в $C(\mathbb{T})$ ”, Тр. ИММ УрО РАН, **15**, 2009, 59–65.
- [12] Н. П. Корнейчук, *Сплаины в теории приближения*, Наука, М., 1984.

С. А. Пичугов

Днепропетровский национальный технический
университет железнодорожного транспорта
E-mail: s.a.pichugov@mail.ru

Поступило

22.04.2012