

С. В. МЯМЛИН (ДИИТ), В. И. ПРИХОДЬКО (ОАО «Крюковский вагоностроительный завод»)

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ РАЦИОНАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ СЛОЖНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Пропонується математичний опис вибору параметрів механічних систем в загальному вигляді та з урахуванням особливостей залізничних екіпажів. Розглянуті приклади рішення задач векторної оптимізації за декількома показниками.

Предлагается математическое описание выбора параметров механических систем в общем виде и с учетом особенностей железнодорожных экипажей. Рассмотрены примеры решения задач векторной оптимизации по нескольким показателям.

The mathematical description of choosing the parameters of mechanical systems in general form and with eking account of the features of rail vehicles is presented. The examples of solution of vector optimization problems according to several indices are considered.

При создании новой конструкции, представляющей собой сложную механическую систему, например, рельсовый экипаж, существует проблема реализации конкретных технических решений с учетом различных условий возможных ограничений и требований. Причем это касается не только стадии проектирования конструкции, но и последующих стадий: производства, изготовления, эксплуатации, ремонта, утилизации. Но, создавая новую конструкцию, не возможно не обойтись без реализации и новых свойств конструкции, то есть новых параметров. Поэтому при создании механической системы или технического объекта, которым необходимо выполнять определенные функции в заданных условиях, возникает необходимость решения задачи по определению рациональных параметров составляющих ее элементов. Так, для рельсовых экипажей и для грузовых и пассажирских вагонов в частности, такими элементами могут быть несущие элементы конструкции кузова и тележки, а также системы гашения колебаний и амортизации [1–3].

Как известно, на стадии проектирования технического объекта создается его математическая модель и модель условий функционирования. В математической модели имеется некоторый набор параметров, которые необходимо определить, задавшись понятием их рациональности. Как правило, понятие рациональности формулируется на языке бинарных отношений [4]. Так, например, для грузового вагона в качестве показателей рациональности в работе [5] принимаются коэффициенты вертикальной и горизонтальной динамики необрессорен-

ной части вагона и коэффициент запаса устойчивости от всползания колеса на рельс.

Для пассажирского вагона показатели рациональности могут также включать кроме названных и коэффициенты горизонтальной и вертикальной динамики обрессоренных частей, коэффициент плавности хода, ускорения кузова вагона в вертикальном и в горизонтальном поперечном направлении. Как правило, следует принимать во внимание нормируемые показатели, например, в соответствии с Нормами [6]. Но возможно учитывать и ненормируемые показатели для рельсовых экипажей, такие как показатель износа на поверхности катания и показатель износа на гребне колеса [5].

Чтобы подобным задачам придать единообразную форму будем считать, что располагаем множеством $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$, представляющем собой набор возможных элементов, из которых создается та или иная конструкция технического объекта, а каждый из элементов характеризуется несколькими параметрами. Например, элемент представляет собой пружину, тогда в качестве параметров могут быть взяты ее жесткость и геометрические размеры.

Так как целью данной работы является разработка теоретических основ определения рациональных параметров сложных механических систем, в т.ч. и за счет планирования эксперимента, результаты которого оцениваются по нескольким показателям, например, для рельсового экипажа это динамические показатели, которые в свою очередь в общем случае желательно сделать как можно меньше (кроме коэффициента устойчивости от всползания ко-

леса на рельс, который должен быть больше, и если меньше, то со знаком «минус»). Таким образом, в математическом плане приходим к задаче векторной оптимизации.

Формальная запись, которая представляет собой [7; 8]

$$\begin{pmatrix} F_1(x) \\ F_2(x) \\ \dots \\ F_n(x) \end{pmatrix} \rightarrow \min, \quad (1)$$

где $x \in X \subset E_n$.

Прежде всего отметим, что будем понимать под решением задачи (1). Введем в рассмотрение бинарное отношение Парето [4]. Пусть x и y две производные точки из множества X , тогда под отношением Парето будем понимать

$$x P y \leftrightarrow (F_i(x) \leq F_i(y), i = \overline{1, m}) \quad (2)$$

причем среди неравенств имеется хотя бы одно строгое. Под решением задачи (1) будем понимать такое множество $X_* \subseteq X$, что любые две точки из X_* являются неравными по Парето, последнее означает, что найдутся какие-либо два показателя $F_i(x)$ и $F_j(x)$, так что будет иметь место

$$\begin{pmatrix} F_i(x) \leq F_j(y) \\ F_j(x) \geq F_j(y) \end{pmatrix} \text{ или } \begin{pmatrix} F_i(x) \geq F_i(y) \\ F_j(x) \leq F_j(y) \end{pmatrix}.$$

Для более конкретного толкования данных понятий рассмотрим пример, когда $m = 4$, а $n = 2$.

$$F_1(x) = x_1^2 + x_2^2;$$

$$F_2(x) = (x_1 - 1)^2 + 5(x_2 - 2)^2;$$

$$F_3(x) = 4(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 1)^2;$$

$$F_4(x) = 2(x_1 - 1,5)^2 + (x_2 - 1,5)^2.$$

И рассмотрим шесть задач

$$\begin{pmatrix} F_i(x) \\ F_j(x) \end{pmatrix} \rightarrow \min, \quad (3)$$

где $i = \overline{1, 3}$; $j = \overline{i+1, 4}$.

В качестве множества X возьмем E_2 . Необходимое условие решения задачи (3) представляет собой

$$\nabla F_i(x) = -\lambda \nabla F_j(x), \quad (4)$$

где $\lambda \geq 0$.

Решая уравнение (4) получим $x(\lambda)$, а перебирая λ от нуля до бесконечности получим множество X_{ij} .

Выполнив объединение множеств X_{ij} , имеем

$$\tilde{X} = \bigcup_{\substack{i=\overline{1,3} \\ j=\overline{i+1,4}}} X_{ij}$$

Точки множества \tilde{X} удовлетворяют необходимому условию (4), поэтому решение задачи (1) X_* будет принадлежать этому множеству.

Взяв $i = 1$; $j = 2$, необходимое условие (4) принимает вид

$$\begin{cases} 2x_1 + \lambda(2x_1 - 2) = 0; \\ 6x_1 + \lambda(10x_2 - 20) = 0, \end{cases}$$

решением данной системы будет

$$x_1 = \frac{\lambda}{1 + \lambda};$$

$$x_2 = \frac{10\lambda}{3 + 5\lambda},$$

а множество X_{12} будет равным:

$$X_{12} = \bigcup_{\lambda \geq 0} \left\{ (x_1, x_2) : x_1 = \frac{\lambda}{1 + \lambda}; x_2 = \frac{10\lambda}{3 + 5\lambda} \right\}.$$

Геометрическое представление данного множества представлено на рис. 1.

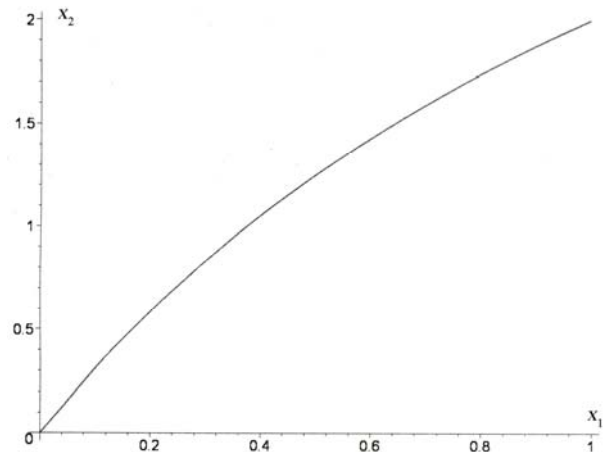


Рис. 1. Геометрическое представление множества X_{12}

Если подставить полученные значения $\tilde{\alpha}_1(\lambda)$ и $\tilde{\alpha}_2(\lambda)$ в $F_1(x)$ и $F_2(x)$, то имеем возможность построить зависимость F_2 от F_1 , т. е. отображение множества X_{12} в пространство функционалов (F_1, F_2) будет таким как показано на рис. 2.

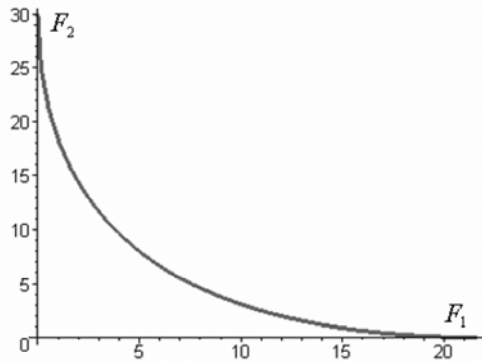


Рис. 2. Представление множества X_{12} в пространстве функционалов

Решив остальные задачи, получим множество \tilde{O} (рис. 3).

Заметим, что узловые точки представляют собой точки, в которых соответствующие функции принимают минимальное значение.

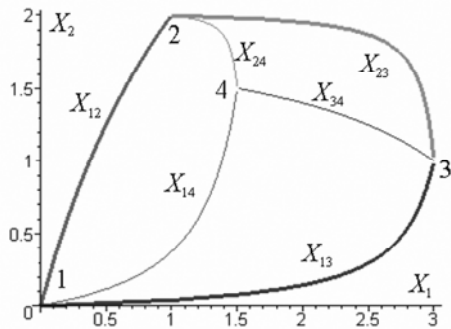


Рис. 3. Геометрическое представление \tilde{O}

В общем случае множество \tilde{O} может быть довольно непривычного вида. Например, если $F_4(x)$ принять в виде $F_4 = 2(x-5)^2 + (y-4)^2$, то множество \tilde{O} будет таким, как показано на рис. 4.

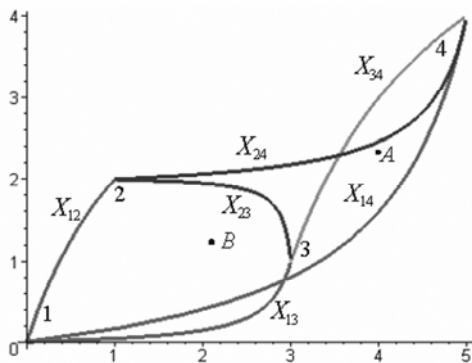


Рис. 4. Множество \tilde{O} при измененной F_4

Возьмем в области \tilde{O} две точки $A(4, 2)$ и $B(2, 1)$ и вычислим значения всех четырех функций в этих точках. В результате получим следующие значения:

$$\begin{aligned} F_1(A) &= 28; & F_1(B) &= 7; \\ F_2(A) &= 9; & F_2(B) &= 6; \\ F_3(A) &= 5; & F_3(B) &= 4; \\ F_4(A) &= 6; & F_4(B) &= 27. \end{aligned}$$

Из этих значений следует, что

$$\begin{aligned} F_1(A) &> F_1(B); \\ F_4(A) &< F_4(B), \end{aligned}$$

т.е. точки A и точки B являются несравнимыми по Парето.

На рис. 3 и 4 пунктирной линией обозначена граница области \tilde{O} .

Изложенный материал дает представление о том, когда функции $F_i(x)$ представляют собой квадратичные формы и в этом случае решение системы (4) может быть получено в аналитическом виде.

Если же хотя бы одна из функций $F_i(x)$ не является квадратичной формой, то система (4) в общем виде не имеет аналитического решения.

Пусть $F_1(x) = 2 - e^{-x^2} - e^{-y^2}$, что представляет собой в геометрическом виде поверхность, изображенную на рис. 5.

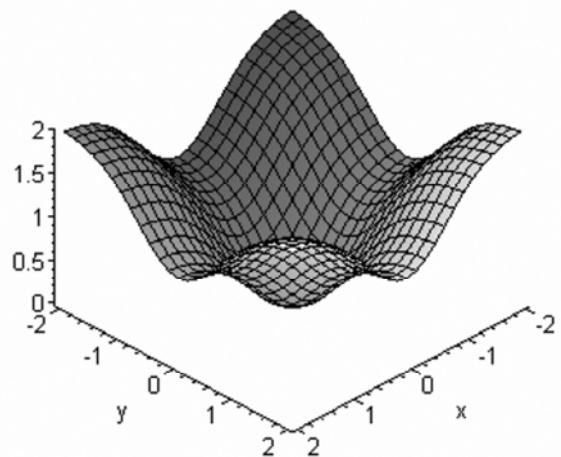


Рис. 5. Геометрическое представление поверхности $F_1(x)$

Задавшись некоторой точкой (x_0, y_0) в окрестности ее поверхность $F_1(x)$ приблизим квадратичной формой:

$$Y_1 = a_{00} + a_{10}(x - x_0) + a_{01}(y - y_0) + \frac{1}{2}(a_{20}(x - x_0)^2 + 2a_{11}(x - x_0)(y - y_0) + a_{02}(y - y_0)^2),$$

которую будем использовать при решении системы (2).

Вид квадратичной формы при $x_0 = 0,5$; $y_0 = 0,1$ представлен на рис. 6.

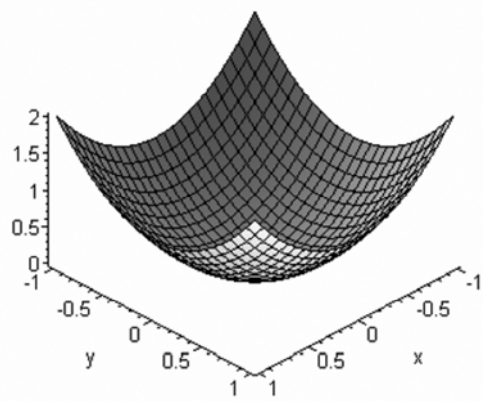


Рис. 6. Вид $Y_1(x, y)$ в окрестности точки $(x_0 = 0,5; y_0 = 0,1)$

О характере приближения квадратичной формой можно более подробно уяснить с помощью сечений, изображенных на рис. 7 и 8.

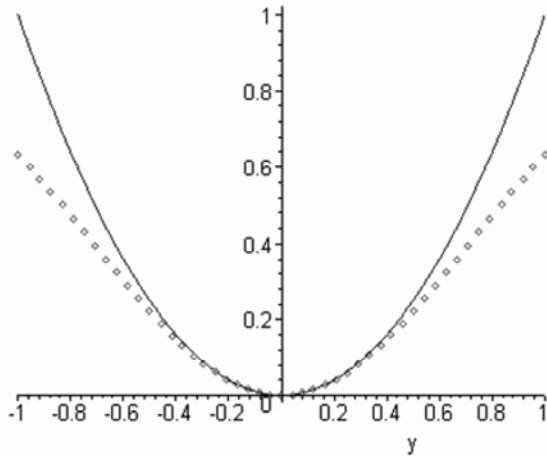


Рис. 7. Сечения поверхностей $F_1(x)$ и $Y_1(x)$ плоскостью $y = y_0$. Точки – $F_1(x, y_0)$; сплошная линия – $Y_1(x, y_0)$

$$x = - \frac{(-a_{11}a_{01} - 12\lambda^2 + a_{11}^2x_0 + 3a_{11}\lambda - 6a_{02}\lambda - 2\lambda a_{11}y_0 + a_{02}a_{10} - a_{02}a_{20}x_0 - 2\lambda a_{20}x_0 + 2\lambda a_{10})}{(-a_{11}^2 + a_{02}a_{20} + 4a_{02}\lambda + 2\lambda a_{20} + 8\lambda^2)}$$

$$y = \frac{(y_0a_{02}a_{20} + 4y_0a_{02}\lambda - a_{20}a_{01} + 3\lambda a_{20} - 4\lambda a_{01} + 4\lambda a_{11}x_0 + 12\lambda^2 + a_{10}a_{11} - a_{11}^2y_0 - 6a_{11}\lambda)}{(-a_{11}^2 + a_{02}a_{20} + 4a_{02}\lambda + 2\lambda a_{20} + 8\lambda^2)}$$

Задавшись интервалом изменения λ , построим решение системы (4) (рис. 9).

Как следует из данного рисунка с увеличением λ приближенное значение отклоняется от точного.

При $\lambda=0,1$ приближенные значения $x(\lambda)$ и $y(\lambda)$ равны

$$x = 0,25; \quad y = 0,136,$$

а точные значения x и y следующие

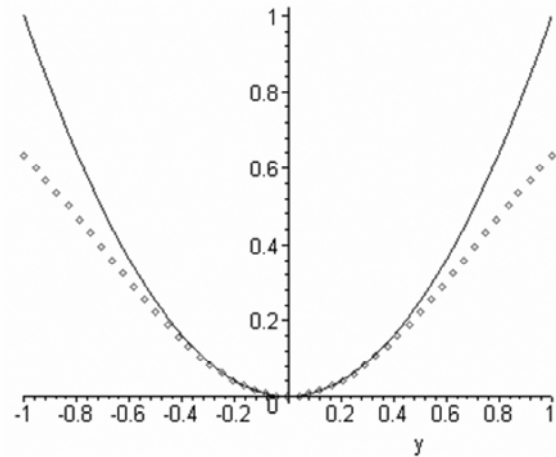


Рис. 8. Сечение поверхностей $F_1(x)$ и $Y_1(x)$ плоскостью $x = x_0$. Точки – $F_1(x_0, y)$; сплошная линия – $Y_1(x_0, y)$

Рассмотрим задачу

$$\begin{pmatrix} F_1(x, y) \\ F_4(x, y) \end{pmatrix} \rightarrow \min,$$

для которой система (4) принимает вид

$$\begin{cases} 2xe^{-x^2-y^2} = -\lambda 4(x-1,5); \\ 2ye^{-x^2-y^2} = -\lambda 2(y-1,5). \end{cases} \quad (5)$$

Если вместо $F_1(x, y)$ взять приближенное значение $Y_1(x, y)$, то аналогом системы (5) будет следующая:

$$\begin{cases} \dot{a}_{10} + \dot{a}_{20}(\bar{o} - \bar{o}_0) + \dot{a}_{11}(\bar{o} - \bar{o}_0) = -4\lambda(\bar{o} - 1,5); \\ \dot{a}_{01} + \dot{a}_{02}(\bar{o} - \bar{o}_0) + \dot{a}_{11}(\bar{o} - \bar{o}_0) = -2\lambda(\bar{o} - 1,5). \end{cases} \quad (6)$$

В общем виде решение системы (6) представляет собой:

$$x = 0,265; \quad y = 0,139.$$

Взяв в качестве $x_0 = 0,25$; $y_0 = 0,136$ и выполнив квадратичную аппроксимацию функции $F_1(x, y)$ в окрестности данной точки, решаем систему (4) при $0,1 \leq \lambda \leq 0,35$. Этим решением продолжаем решение представленное на рис. 9. Результат данного продолжения на рис. 10.

Как следует из изложенного, при решении системы (4) можно использовать квадратичную аппроксимацию исходных функций и с опреде-

ленным шагом по λ получить достаточно приемлемое по точности решение задачи векторной оптимизации.

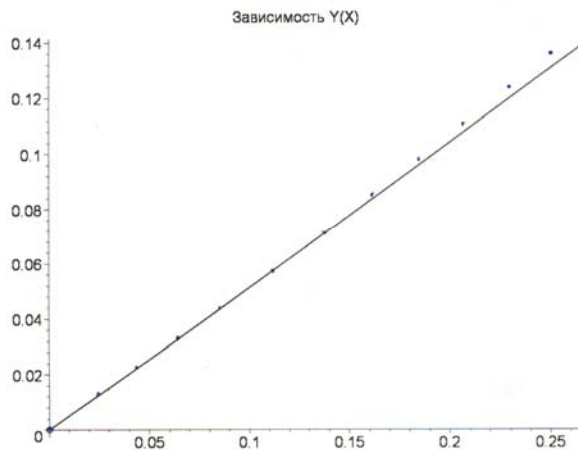


Рис. 9. Решение системы (4). Сплошная линия – точное решение, точки – решение для квадратичной аппроксимации $F_1(x, y)$, при $0 \leq \lambda \leq 0,1$

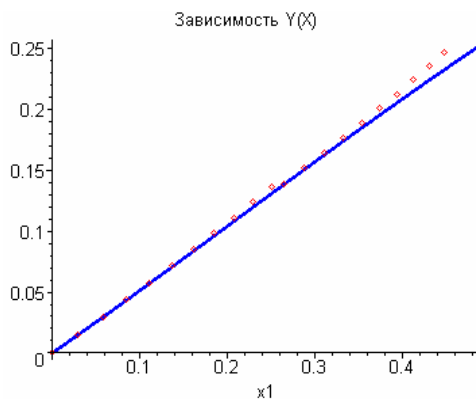


Рис. 10. Решение системы (4). Сплошная линия – точное решение при $0 \leq \lambda \leq 0,35$, точки – приближенное решение

Учитывая, что данный метод будет использоваться в ситуации, когда с помощью эксперимента могут быть получены только значения функций (показателей) в задаче (1) [8], необходимо разработать также метод для выбора точек, в которых будет проводиться эксперимент и процедуру построения множества Парето по экспериментальным данным.

Таким образом, предложено математическое описание выбора рациональных параметров сложных механических систем как в общем виде, так и с учетом особенностей рельсовых экипажей. Это математическое описание может служить теоретической основой для последующего выбора конкретных параметров конструкции и систем гашения колебаний при проектировании новых конструкций рельсовых экипажей, а также для прогнозирования эксперимента по определению различных характеристик рельсовых экипажей.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Камаев В. А. Оптимизация параметров ходовых частей железнодорожного подвижного состава. – М.: Машиностроение, 1980. – 215 с.
2. Мямлин С. В. Оптимизация параметров рессорного подвешивания рельсовых экипажей / С. В. Мямлин, А. Н. Пшинько // Вісник Східноукраїнського національного університету ім. В. Даля. – Луганськ, 2003. – № 9 (67). – С.79–85.
3. Мямлин С. В. Оптимизация параметров рессорных комплектов тележек пассажирского вагона / С. В. Мямлин, А. Н. Пшинько // Вісник Дніпропетровського нац. ун-ту залізнич. тр-ту ім. акад. Лазаряна. – Д.: Вид-во Дніпропетр. нац. ун-ту залізн. трансп. ім. акад. В. Лазаряна. – 2005. – № 7. – С.47–51.
4. Ногин В. Д. Принятие решений в многокритериальной среде: количественный подход. – М.: Физматлит, 2002. – 144 с.
5. Мямлин С. В. Моделирование динамики рельсовых экипажей. – Д.: Новая идеология, 2002. – 240 с.
6. Нормы для расчета и проектирования новых и модернизируемых вагонов железных дорог МПС колеи 1520 мм (несамоходных). – М.: МПС РФ, 1996.
7. Босов А. А. Производные функции множества // Залізнич. транспорт України. – 2004. – № 4. – С. 16–18.
8. Босов А. А. Функции множества и их применение: Монография. – Днепропетровск: Изд.дом «Андрей», 2007. – 182 с.

Поступила в редколлегию 23.03.06.