МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ДНІПРОВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ЗАЛІЗНИЧНОГО ТРАНСПОРТУ
ІМЕНІ АКАДЕМІКА В. ЛАЗАРЯНА

О. Л. ЯНГУЛОВА

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА
Аналітична механіка

Навчальний посібник

ДНІПРО
2019

УДК 531/534(075.8)
Я 60

Рецензенти:
В. В. Кулябко – д-р техн. наук, професор кафедри металевих, дерев’яних та пластмасових конструкцій Придніпровської державної академії будівництва та архітектури;
Д. Л. Колосов – д-р техн. наук, завідувач кафедри будівельної, теоретичної та прикладної механіки ДВНЗ «Національний гірничий університет»

Рекомендовано
вченою радою університету як навчальний посібник
(протокол № 11 від 25.06.2018).
Зареєстровано НМВ ДНУЗТ (реєстр. № 326/18-1 від 11.01.2018)

Я 60 **Янгулова, О. Л.**
Теоретична механіка. Аналітична механіка [Текст] : навч. посіб. / О. Л. Янгулова; Дніпров. нац. ун-т залізн. трансп. ім. акад. В. Лазаряна. – Дніпро, 2019. – 75 с.
ISBN 978-966-8471-82-7

У посібнику наведено загальні поняття аналітичної механіки, розглянуто диференціальні принципи механіки (принцип Д’Аламбера), загальні рівняння динаміки, принцип можливих переміщень, а також диференціальні рівняння руху матеріальної системи та прикладні питання, пов’язані з коливанням механічної системи. Кожен розділ містить методику та приклади розв’язання задач, а також задачі для самостійного розв’язування.

Для студентів I і II курсів денної та дистанційної форм навчання усіх спеціальностей технічних ВЗО, які вивчають повний курс теоретичної механіки.

. Іл. 36. Бібліогр.: 8 назв.

УДК 531/534(075.8)

ISBN 978-966-8471-82-7

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Цей навчальний посібник призначений для поглибленого вивчення аналітичної механіки як найважливішого розділу теоретичної механіки. Для успішного засвоєння цієї дисципліни студенти молодших курсів, на яких вона викладається, мають навчитися поєднувати знання з курсу фізики та математики, що становить певні труднощі. Основним шляхом вивчення будь-якої теми в точних науках є самостійна робота, зокрема набуття практичних навичок у розв'язанні задач. Тож мета цього навчального посібника – допомога студентам вищих технічних навчальних закладів в опануванні та систематизації знань з аналітичної механіки завдяки засвоєнню методики розв'язання задач.

Навчальний посібник складається з передмови, вступу й чотирьох розділів: «Елементи аналітичної механіки», «Диференціальні принципи механіки», «Диференціальні рівняння руху матеріальної системи», «Прикладні питання». У кожному розділі наведено теоретичні відомості як найвищий ступінь абстракції та узагальнення, які досягнуті в аналітичній механіці. Усі розділи завершуються методикою та прикладами розв'язання задач. У кінці посібника наведено список літератури, з якої використано фактичний матеріал.

ВСТУП

Аналітична механіка як розділ теоретичної механіки сформувалася Ж. Лагранжем ще в XVIII столітті та далі розвивалася такими видатними вченими, як В. Гамільтон, М. Остроградський, К. Гаусс, К. Якобі, С. Пуассон, О. Ляпунов та інші. Вона узагальнює положення теоретичної механіки, математично формалізуючи їх та дозволяючи розглядати рівновагу чи рух довільної механічної системи з позиції зміни її фізичного стану (енергії) чи фізичного процесу (роботи). Умови рівноваги чи рівняння руху механічної системи в аналітичній механіці можуть бути складені на підставі виразів кінетичної енергії та роботи.

Для визначення положення точок механічної системи аналітична механіка використовує так звані **узагальнені координати** – абстрактні будь-якої розмірності величини чи параметри, які однозначно визначають положення системи в просторі. Використання узагальнених координат, функцій стану та процесу дозволяє складати диференціальні рівняння не тільки механічного руху, а й інших видів фізичного руху, наприклад електромагнітного, електромеханічного тощо.

Найзагальніші методи розв’язування задач механіки ґрунтуються на **загальних принципах** – положеннях, які встановлюють залежність між головними поняттями механіки (механічна система, простір, час, сила, в’язі, робота, енергія) і кінематичними елементами руху механічних систем (закон руху, швидкість, прискорення). Якщо принцип дозволяє визначити дійсний рух системи в кожний момент часу, то такий принцип є **диференціальним**. Принцип є **інтегральним**, якщо дійсний рух системи в скінченний інтервал часу визначається за допомогою варіації якогось функціонала, який встановлює множину кінематично можливих рухів системи. Такі принципи ще називаються **варіаційними принципами механіки**.

РОЗДІЛ 1

Елементи аналітичної механіки

1.1. Загальні поняття про механічну систему та в’язі

Механічною системою називають сукупність матеріальних точок і твердих тіл, що взаємодіють між собою відповідно до третього закону Ньютона. Під терміном «точка» мається на увазі не тільки справжня матеріальна точка, тобто тіло нескінченно малих розмірів, але й будь-яке тверде тіло, що рухається поступально. Оскільки тіла, які утворюють механічну систему, взаємодіють між собою, то положення й рух будь-якого елемента системи залежить від положення й руху інших елементів.

Механічні системи бувають **вільні** та **невільні**. Вільна система складається з точок, кожна з яких може здійснювати будь-який рух (за наявності відповідних сил). Прикладом може слугувати Сонячна система. Будь-яка з її планет може змінювати свій рух за наявності відповідних сил, наприклад сили тяжіння комети, яка з’явилася з космосу. Набагато частіше трапляються пов’язані системи (невільні), у яких рух різних елементів обмежений.

Обмеження, накладені на рух елементів механічної системи, називаються **в’язями**. В’язі фізично реалізуються за допомогою рухомих і нерухомих твердих тіл, а математично описуються рівняннями або нерівностями. Якщо аналітичним виразом в’язі є рівняння, вона називається **стримувальною, або двобічною**. Така в’язь, перешкоджаючи деякому переміщенню точки системи, перешкоджає також її протилежному переміщенню. Якщо аналітичним виразом в’язі є нерівність, вона називається **нестримувальною, або однобічною**. Така в’язь, перешкоджаючи деякому переміщенню точки, не перешкоджає протилежному її переміщенню.

Розглянемо приклади таких в'язей (рис. 1.1): точки A і B з'єднані стержнями (рис. 1.1, *а*), під час руху системи в площині xy ця в'язь описується рівнянням

$$\left(x_B - x_A\right)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2 = l^2. \tag{1.1}$$

Відстань AB залишається незмінною: вона не може ні збільшуватися, ні зменшуватися. Ця в'язь стримувальна.

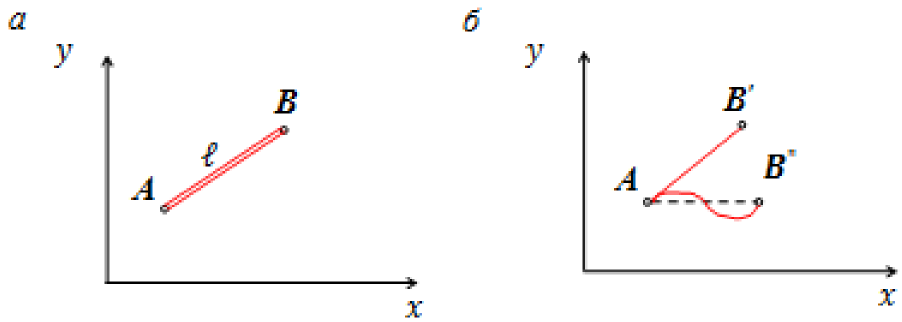

Рис. 1.1

Точки A і B з'єднані гнучкою ниткою (рис. 1.1, *б*). Якщо нитка натягнута $\left(AB'\right)$, то маємо рівняння (1.1). Якщо нитка $\left(AB''\right)$ не натягнута, то маємо нерівність $\left(x_B - x_A\right)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2 < l^2$. З'єднуючи обидва випадки, отримаємо

$$\left(x_B - x_A\right)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2 \le l^2.$$

Ця в'язь нестримувальна. Вона перешкоджає віддаленню точок A і B, але не перешкоджає зближенню.

Надалі будемо розглядати тільки стримувальні в'язі. Це пояснюється тим, що в більшості випадків активні сили ніби «зачиняють» відкриту сторону нестримувальної в'язі й дозволяють розглядати її як стримувальну. Наприклад, колії для вагона у вертикальному напрямку хоча і являють собою нестримувальну в'язь (вагон можна підняти краном), проте у зв'язку зі значною вагою вагона під час його звичайного руху можна не враховувати відкриту сторону цієї в'язі.

В'язі, залежно від їхнього характеру, можна розділити на **стаціонарні** й **нестаціонарні**. У рівняння стаціонарної в'язі час t явно не входить, воно має вигляд $f(x_i, y_i, z_i)=0$. У рівняння ж нестаціонарної в'язі цей параметр явно входить, і її рівняння має вигляд $f(x_i, y_i, z_i, t)=0$.

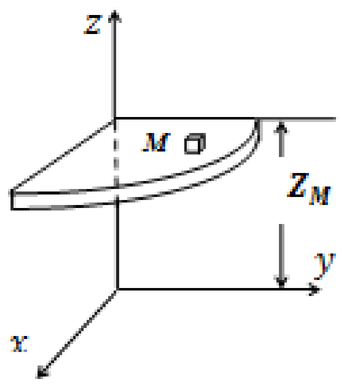

Рис. 1.2

Нестаціонарні в'язі не можуть бути реалізовані за допомогою нерухомих твердих тіл. Наприклад, якщо вантаж M може переміщуватися по горизонтальній платформі, яка у свою чергу одночасно рівномірно підіймається зі швидкістю V (рис. 1.2), то рівняння цієї в'язі має вигляд $z_M = Vt$ (x і y можуть тут змінюватися в довільному порядку). На противагу цьому стаціонарна в'язь завжди може бути реалізована з допомогою нерухомої поверхні. Розглянемо, наприклад, математичний маятник.

Припустимо, вантаж M рухається по колу радіусом l за допомогою нитки (рис. 1.3, *а*). Таку в'язь можна записати у вигляді рівняння $x^2 + y^2 = l^2$, де x, y – координати вантажу. Рух тіла M не зміниться, якщо ми рухому нитку замінимо нерухомою гладкою трубкою (рис. 1.3, *б*).

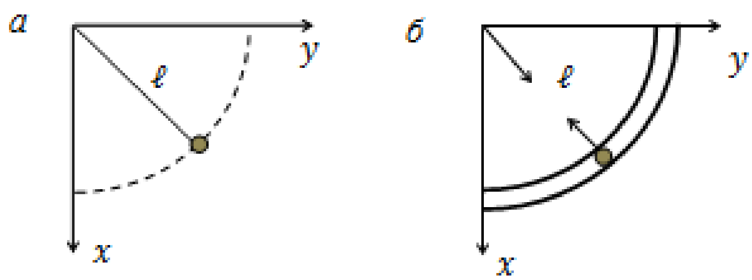

Рис. 1.3

До цього моменту ми розглядали в'язі, у рівняння яких входили тільки координати та час. Такі в'язі, які накладають обмеження тільки на положення (конфігурацію) механічної системи, називаються **геометричними**. Крім того, є в'язі, які накладають обмеження на швидкості різноманітних елементів системи. Такі в'язі називаються **кінематичними**. Вони описуються рівняннями виду $f(x_i, y_i, z_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i)=0$ або $f(x_i, y_i, z_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i, t)=0$. Прикладом може слугувати циліндр, який котиться без ковзання по площині (рис. 1.4). Положення його перерізу в площині xy визначається трьома величинами: координатами центру x, y та кутом повороту φ. Ці величини не є незалежними. Рівняння геометричної в'язі має вигляд

$$y = r\,,$$

а кінематичної:

$$V_C = \omega r \quad \text{або} \quad \dot{x} = r\varphi\,.$$

У цьому випадку диференціальне рівняння кінематичної в'язі може бути проінтегроване, після чого воно набуває вигляду $x = r\varphi + x_C$ (стала C залежить від положення початку координат). Між геометричними та інтегрованими кінематичними в'язями немає принципової різниці. Вони можуть бути описані кінцевим (недиференціальним) рівнянням і тому об'єднуються в одну категорію – **голономні в'язі**.

Часто трапляються кінематичні в'язі, аналітичним виразом яких є неінтегроване диференціальне рівняння. Ці в'язі називаються **неголономними**. Прикладом є санчата (рис. 1.5). Конструкція полозів така, що допускає поздовжнє (за напрямком AB) ковзання й вертіння (обертання навколо C). Забороненим є бокове ковзання (за напрямком C_n). Ця умова полягає в тому, що проекція швидкості точки C на пряму C_n повинна дорівнювати нулю. Але

$$V_n = \dot{y}\cos\varphi - \dot{x}\sin\varphi\,.$$

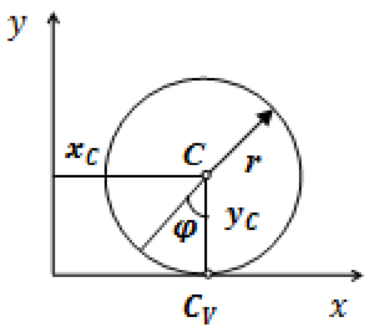

Рис. 1.4

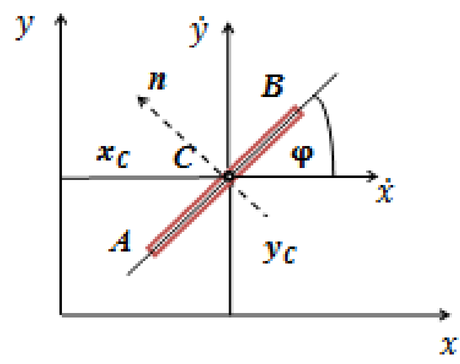

Рис. 1.5

Отже, кінематична в'язь, що не допускає бокового ковзання, тобто $V_n = 0$, описується рівнянням

$$\dot{y}\cos\varphi - \dot{x}\sin\varphi = 0\,. \qquad (1.2)$$

Це рівняння не інтегрується. Дійсно, припустимо протилежне, а саме, що вираз (1.2) припускає інтеграл

$$f\left(x, y, \varphi\right) = C. \tag{1.3}$$

Тоді, диференціюючи (1.3), ми повинні тотожно отримати (1.2), тобто

$$\frac{\partial f}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial f}{\partial \varphi}\dot{\varphi} = \dot{y}\cos\varphi - \dot{x}\sin\varphi + 0\dot{\varphi} = 0.$$

Прирівнюючи множники за однакових похідних, отримаємо

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\sin\varphi;\quad \frac{\partial f}{\partial y} = \cos\varphi;\quad \frac{\partial f}{\partial \varphi} = 0.$$

Диференціюємо перше з цих рівнянь за φ, а третє – за x, отримаємо

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \cdot \partial \varphi} = -\cos\varphi,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi \cdot \partial x} = 0,$$

тобто

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \cdot \partial \varphi} \neq \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi \cdot \partial x}.$$

Таким чином, припущення про можливість інтегрування (1.2) привело нас до суперечності з теоремою про рівність змішаних похідних. Отже, це рівняння є аналітичним виразом неголономної в’язі.

Сили, що діють на елементи механічної системи, залежно від поставлених задач розділяються на категорії двома способами. У тих задачах динаміки, під час розв’язування яких обчислюється робота, сили доцільно поділяти на **активні**, які можна довільно прикладати до системи, та **реакції в’язей**, які залежать від їхньої конструкції та руху системи.

Активні сили прагнуть рухати елементи системи, а реакції в’язей або перешкоджають цьому руху, або змінюють його. А в тих задачах динаміки, у ході розв’язування яких обчислюється головний вектор або головний момент усіх сил, що діють на систему, сили зазвичай поділяють на **зовнішні** та **внутрішні**.

Перші діють на механічну систему з боку тіл, які не входять до неї; інші – це сили взаємодії між елементами однієї механічної системи. Такий поділ є умовним: він залежить від того, які тіла ми включаємо до системи. Якщо ми цю механічну систему розділимо на частини, то частина внутрішніх сил перейде в категорію зовнішніх.

Так, у зображеній на рис. 1.6 системі зчленованих тіл зовнішніми силами є навантаження й реакції в шарнірно нерухомих опорах A і C, реакція ж в опорі B є внутрішньою силою. Якщо ж виконаємо розподіл цієї системи на два тіла, то для кожного з них окремо реакція в опорі B буде зовнішньою. Відповідно до закону Ньютона головний вектор і головний момент усіх внутрішніх сил завжди дорівнює нулю. З цього зовсім не випливає, що внутрішні сили взаємно зрівноважуються. Потрібно пам’ятати, що рівність нулю головного вектора та головного моменту є умовою рівноваги системи сил, прикладених до одного твердого тіла. Якщо механічна система не є твердим тілом, тоді ці сили не зрівноважуються.

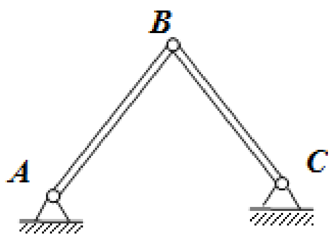

Рис. 1.6

На рис. 1.7 зображено дві матеріальні точки, з’єднані розтягнутою пружиною. Внутрішні сили $\vec{S}$ і $-\vec{S}$ мають нульовий головний вектор і момент, а вантажі в рівновазі не перебувають.

Рис. 1.7

1.2. Можливі, здійснені та дійсні переміщення. Число степенів вільності системи

Поняття про можливі переміщення є одним з найважливіших понять механіки. Відрізнятимемо можливі, здійснені та дійсні переміщення. *Можливим переміщенням механічної системи називається сукупність нескінченно малих віртуальних переміщень точок системи, які допускаються станом в’язей у конкретний момент часу.* З позиції варіаційного числення можливі переміщення – це ізохорні варіації координат (змінна часу t вважається зафіксованою, а в’язі ніби заморожуються). Таким чином, можливе переміщення точки –

уявне: воно отримується не в результаті руху системи, а в результаті порівняння цього положення системи з іншим нескінченно близьким, можливим для того самого моменту часу й досяжним із цього положення. Оскільки нескінченно малими переміщеннями незручно оперувати, замість них часто вводяться пропорційні їм кінцеві вектори, які називаються «**можливі швидкості**». Цей термін є умовним, оскільки можливі переміщення відбуваються за відрізок часу δt, який дорівнює нулю.

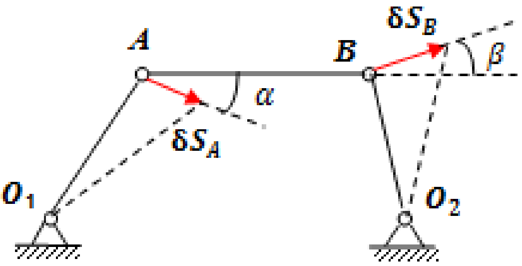

Рис. 1.8

На рис. 1.8 зображено двокривошипний механізм. Переміщення точок A і B δS_A і δS_B можливі в тому випадку, коли вони відбуваються без порушення в'язей, якими є стержні O_1A, O_2B, AB. Для цього (очевидно) мають бути дотримані три умови:

1) δS_A перпендикулярно O_1A;

2) δS_B перпендикулярно O_2B; 3) $\delta S_A \cos\alpha = \delta S_B \cos\beta$ (остання умова виникає завдяки твердості стержня).

Здійсненими переміщеннями називають переходи точок системи з одного положення в просторі й у часі в інші, які дозволяють в'язі. Час при цьому не фіксується, нестаціонарні в'язі не «зупиняються».

Дійсні переміщення відповідають справжньому закону руху системи, відбуваються за час $dt \neq 0$ під дією сил, прикладених до точок системи. Ці переміщення утворюють одну із систем здійснених переміщень.

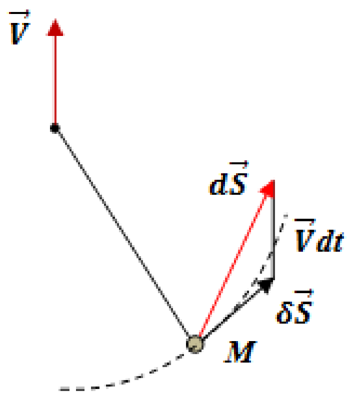

Рис. 1.9

Можливі й здійснені переміщення не можуть збігатися. Але якщо в'язь стаціонарна, то дійсне переміщення збігається з одним із можливих, якщо ж нестаціонарна, то воно дорівнює векторній сумі можливого переміщення й переміщення в'язі. На рис. 1.9 зображено маятник з точкою M підвісу, що підіймається. Можливе переміщення δS визначається при «замороженій» в'язі, тобто при зупиненій точці підвісу. Насправді точка переміститься вгору на відстань $\vec{V}dt$ і дійсне переміщення $d\vec{S}$ виявиться рівним $d\vec{S} = \delta\vec{S} + \vec{V}dt$.

Визначаючи можливі й дійсні переміщення з рівнянь в'язі, потрібно мати на увазі, що t не варіюється, але диференціюється. Якщо рівняння нестаціонарної в'язі має вигляд $f(x, y, t) = 0$, то можливе переміщення задовольняє співвідношення

$$\frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\delta y = 0,$$

а дійсне:

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial t}dt = 0.$$

У випадку стаціонарної в'язі $\frac{\partial f}{dt} = 0$ і вказана відмінність зникає.

Достатньо важливу роль у динаміці відіграє поняття **можливої роботи сили δ*A***. Це робота на можливому переміщенні δS:

$$\delta A = \left(\vec{F}\delta S\right).$$

У загальному випадку механічна система має множину можливих переміщень. Однак для будь-якої механічної системи можна знайти такі переміщення, через які можуть бути виражені інші переміщення, тобто знайти залежність між переміщеннями. Таким чином, кількість можливих переміщень для механічної системи зменшується.

Наприклад, кривошипно-шатунний механізм, зображений на рис. 1.10, має один степінь вільності, оскільки два переміщення δS_A і δS_B пов'язані співвідношенням $\delta S_A \cos\alpha = \delta S_B \cos\beta$, отже, тільки одне з них є незалежним.

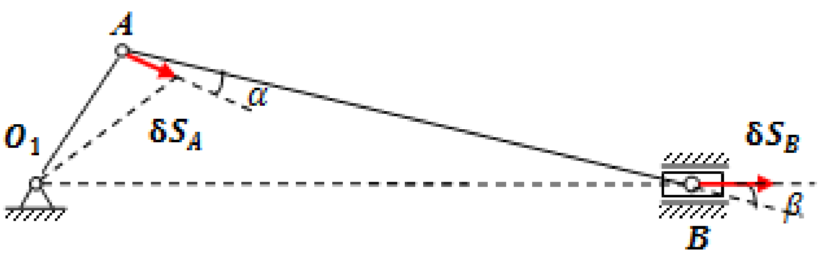

Рис. 1.10

Кількість незалежних між собою можливих переміщень механічної системи називають кількістю степенів вільності.

Отже, точка, яка розташована на площині, має два степені вільності: її положення визначається двома незалежними координатами x, y. Вільна матеріальна точка має три степені вільності: її положення визначається трьома незалежними координатами x, y, z. Вільне матеріальне тіло має шість степенів вільності (незалежних переміщень – три поступальних вздовж координатних осей і три обертання навколо цих осей, а незалежних координат – три координати полюса й три кута Ейлера). Можна зробити висновок: *у механічної системи з геометричними в'язями кількість незалежних координат, які визначають положення системи в просторі, збігається з кількістю степенів вільності.*

1.3. Ідеальні в'язі

Ампер ввів у динаміку постулат про існування «ідеальних в'язей», тобто таких в'язей, реакції яких не здійснюють можливої роботи.

Таким чином, можна дати аналітичне визначення цього терміна.

Ідеальними називають в'язі, алгебраїчна сума робіт реакції $\vec{R}_i$ *яких на будь-яких можливих переміщеннях* $\delta\vec{r}_i$ *точок системи дорівнює нулю.*

$$\sum_{i=1}^{i=n} R_i \delta r_i = 0.$$

Найбільш важливими з них є:

1. Гладка поверхня (або рухома опора, що розглядається в статиці). Реакція такої опори нормальна до поверхні, а отже, і до $\delta\vec{S}$ (рис. 1.11, *а*),

$$\delta A = N\delta S\cos\frac{\pi}{2} = 0.$$

2. Поверхня, що допускає кочення без ковзання. У цьому випадку реакція може мати будь-який напрям залежно від активних сил, які прикладені до тіла (рис. 1.11, *б*), але, оскільки точка її прикладення є миттєвим центром швидкостей, δS, а отже, і δA, дорівнюють нулю.

3. В’язь між елементами незмінної системи (твердий стержень або натягнута нерозтяжна нитка). Ця в’язь є внутрішньою, тому є рівні, протилежні за напрямком реакції (рис. 1.11, *в*). Кожна з них виконує роботу, але сума цих робіт дорівнює нулю.

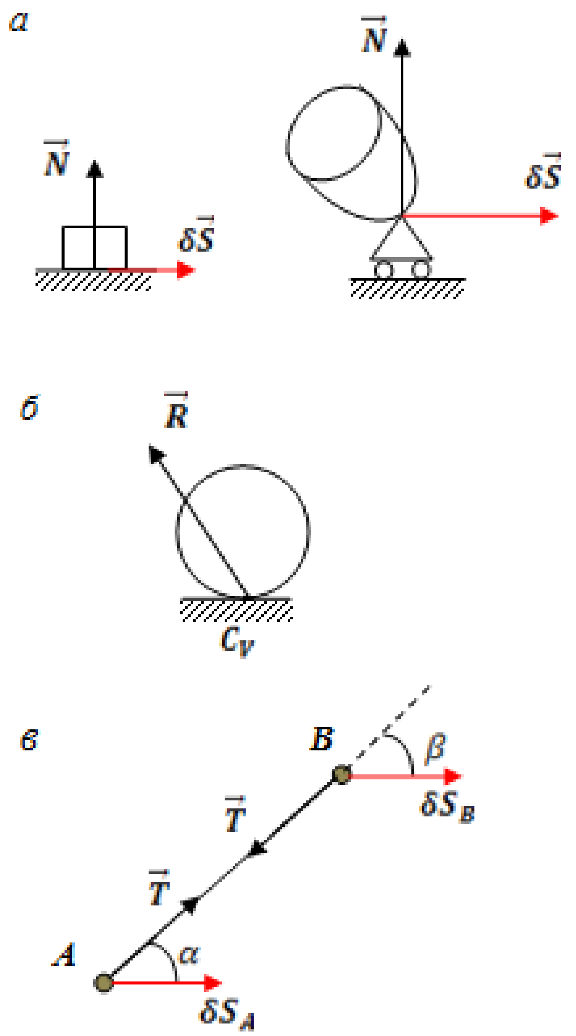

Рис. 1.11

Дійсно, $\delta A = T\delta S_A \cos\alpha + T\delta S_B \cos(\pi - \beta) = T(\cos\alpha - \cos\beta)$.

При незмінній довжині *AB* вираз у дужках дорівнює нулю, оскільки реакції однакові за величиною, а проекції можливих переміщень на напрям стержня рівні між собою.

4. Шарнір без тертя. У цьому випадку елементарну роботу сили реакції зручніше виразити через момент сил реакції. Оскільки реакція проходить через центр шарніра, то її момент, і відповідно робота моменту, дорівнює нулеві.

Запитання та завдання для самоперевірки

1. Що вивчає аналітична механіка?
2. Наведіть визначення в'язей механічної системи.
3. Як математично описується стримувальна, або двобічна, в'язь механічної системи?
4. Чим відрізняються стаціонарні в'язі від нестаціонарних?
5. Чим відрізняються голономні в'язі механічної системи від неголономних?
6. Що таке можливі переміщення? Чим вони відрізняються від здійснених і дійсних?
7. Що таке кількість степенів вільності?
8. Які в'язі називають ідеальними?
9. Яка основна властивість ідеальних в'язей?
10. Наведіть приклади ідеальних в'язей.
11. Знайдіть відношення між можливими переміщеннями точок A та B, якщо вони утворюють з напрямом стержня AB однакові кути?

РОЗДІЛ 2

Диференціальні принципи механіки

2.1. Принцип Д’Аламбера

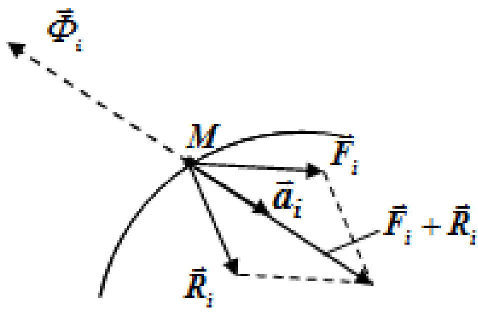

Рис. 2.1

Розглянемо механічну систему, яка складається з n точок. На i-ту точку системи масою m_i, яка рухається по заданій кривій (рис. 2.1), діє рівнодійна активних сил $\vec{F}_i$ і рівнодіюча сил реакцій $\vec{R}_i$ (i – 1, 2, …, n). Вони надають цій точці прискорення $\vec{a}_i$. Тоді в протилежному прискоренню напрямку згідно з третім законом Ньютона буде діяти сила інерції $\vec{\Phi}_i$, яка дорівнює сумі активних сил і сил реакції (на рис. 2.1 вона зображена штрихами). Отже, рівняння руху точки матиме вигляд

$$m_i\vec{a}_i = \vec{F}_i + \vec{R}_i, \qquad (2.1)$$

де $m_i\vec{a}_i = \vec{\Phi}_i$ – **даламберова сила інерції**. Звідси рівняння руху (2.1) можна записати у вигляді рівняння рівноваги трьох сил:

$$\vec{F}_i + \vec{R}_i + \vec{\Phi}_i = 0. \qquad (2.2)$$

Це рівняння й виражає **принцип Д’Аламбера**: *для невільної матеріальної точки в кожний момент часу сума активних сил, що прикладені до точки, реакцій в’язей і сил інерції дорівнює нулю*.

Абсолютне тверде тіло можна розглядати як окремий випадок системи точок. Тоді для тіла справедливий вираз (2.2). Додамо кожен складник почленно:

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i+\sum_{i=1}^{n}\vec{R}_i+\sum_{i=1}^{n}\vec{\Phi}_i=0. \tag{2.3}$$

Перший доданок у (2.3) є головним вектором усіх активних сил $\vec{R}^F$, другий – головним вектором реакцій в'язей $\vec{R}^R$, третій – головним вектором сил інерції $\vec{R}^\Phi$. Отже,

$$\vec{R}^F+\vec{R}^R+\vec{R}^\Phi=0. \tag{2.4}$$

Вибравши довільний центр *O*, проведемо з нього радіус-вектор $\vec{r}_i$ в *i*-ту точку системи. Помножимо кожний доданок рівняння (2.3) векторно на $\vec{r}_i$ і додамо почленно:

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{r}_i\cdot\vec{F}_i+\sum_{i=1}^{n}\vec{r}_i\cdot\vec{R}_i+\sum_{i=1}^{n}\vec{r}_i\cdot\vec{\Phi}_i=0. \tag{2.5}$$

Перша сума у (2.5) – головний момент $\vec{M}_O^F$ усіх активних сил відносно точки *O*, друга – головний момент реакції в'язей $\vec{M}_O^R$, третя – головний момент сил інерції $\vec{M}_O^\Phi$.

Отже,

$$\vec{M}_O^F+\vec{M}_O^R+\vec{M}_O^\Phi=0. \tag{2.6}$$

Рівняння (2.4), (2.6) виражають **принцип Д'Аламбера для системи**: *у кожний момент часу векторна сума головних векторів активних сил, реакції в'язей і сил інерції системи матеріальних точок дорівнює нулю, а також векторна сума головних моментів активних сил, реакції в'язей і сил інерції системи матеріальних точок дорівнює нулю*.

Згідно з рівняннями (2.4), (2.6), систему сил інерції твердого тіла можна замінити однією силою $\vec{R}^\Phi$ – головним вектором, яка прикладена в центрі *O*, і парою з моментом $\vec{M}_O^\Phi$, який дорівнює головному моменту сил інерції.

Головний вектор сил інерції тіла, яке здійснює будь-який рух, дорівнює добутку маси тіла M на прискорення його центру мас $\vec{a}_C$ *і має напрям, протилежний напряму цього прискорення, тобто* $\vec{R}^\Phi=-M\vec{a}_C$.

Якщо прискорення $\vec{a}_C$ розкласти на дотичне $\vec{a}_C^{\tau}$ і нормальне $\vec{a}_C^{n}$, то вектор $\vec{R}^{\Phi}$ розкладеться на складові

$$\vec{R}_{\tau}^{\Phi} = -M\vec{a}_C^{\tau}; \ \vec{R}_{n}^{\Phi} = -M\vec{a}_C^{n}.$$

Розглянемо окремі випадки знаходження головного моменту сил інерції:

1. Поступальний рух. *За поступального руху твердого тіла сили інерції зводяться до рівнодіючої, яка дорівнює головному вектору та проходить через центр мас тіла*. Головний момент у цьому випадку дорівнює нулю $\left(\vec{M}_O^F = 0\right)$, оскільки обертального руху немає.

2. Плоскопаралельний рух. Припустимо, що тіло має площину симетрії й рухається паралельно їй. Тоді головний вектор і результуюча пара сил інерції так само, як і центр мас *C* тіла, лежать у площині симетрії. Якщо вибрати за центр зведення точку *C*, то з рівняння (2.6)

$$\vec{M}_C^{\Phi} = \sum_{i=1}^{n} \vec{m}_C\left(\vec{\Phi}_i\right) = -\sum_{i=1}^{n} \vec{m}_C\left(\vec{F}_i\right) - \sum_{i=1}^{n} \vec{m}_C\left(\vec{R}_i\right),$$

тобто сума моментів сил інерції дорівнює сумі моментів зовнішніх сил. У свою чергу, суму моментів сил інерції, яка дорівнює сумі моментів зовнішніх сил, можна записати за допомогою теореми про зміну кінетичного моменту системи в диференціальній формі як

$$\vec{M}_C^{\Phi} = \sum_{i=1}^{n} \vec{m}_C\left(\vec{\Phi}_i\right) = -\frac{d\vec{K}_C}{dt} = -J_z\vec{\varepsilon}. \quad (2.7)$$

Таким чином, *за плоскопаралельного руху система сил інерції зводиться до результуючої сили, яка дорівнює* $\vec{R}^{\Phi}$ (рис. 2.2) *і прикладена в центрі мас тіла*, *і до пари сил, яка розташована в площині симетрії тіла й момент якої визначається за формулою* (2.7). Знак мінус у формулі (2.7) показує, що напрям моменту $\vec{M}_C^{\Phi}$ протилежний напряму кутового прискорення тіла.

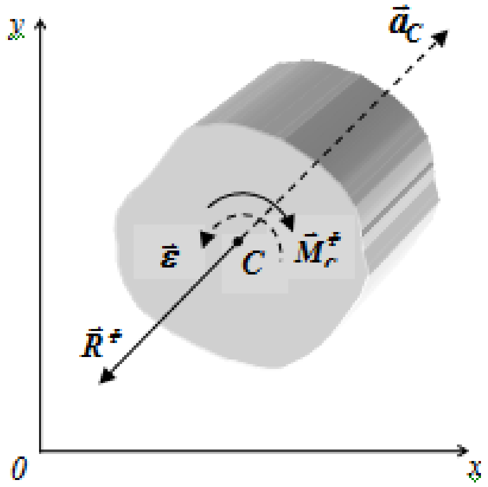

Рис. 2.2

3. Обертання навколо осі, що проходить через центр мас тіла. Припустимо, що тіло має площину симетрії, а вісь обертання *Cz* перпендикулярна до цієї площини та проходить через центр мас тіла. Тоді $a_C = 0$, а отже, і $R^{\Phi} = 0$.

Таким чином, система сил інерції зводиться до пари, яка розташована в площині, що перпендикулярна осі обертання тіла й момент якої дорівнює

$$\vec{M}_C^{\Phi} = -J_z \vec{\varepsilon}\,. \tag{2.8}$$

Отже, принцип Д'Аламбера дає змогу запровадити особливу методику розв'язування задач динаміки, яка полягає в застосуванні в динамічних задачах рівнянь рівноваги статики.

Методика та приклади розв'язання задач за допомогою принципу Д'Аламбера для системи матеріальних точок. Розв'язуючи задачі за допомогою принципу Д'Аламбера, рекомендується дотримуватися такої послідовності:

1. Зобразити на рисунку активні сили, прикладені до кожної з матеріальних точок.
2. Застосувавши аксіому про звільнення від в'язей, показати реакції в'язей, накладених на кожну з точок системи.
3. Додати до діючих сил головний вектор і головний момент сил інерції.
4. Вибрати відповідну систему координат.
5. Скласти аналітичні умови рівноваги для кожної з точок системи.
6. Розв'язати складену систему рівнянь, визначити шукані величини.

Приклад 2.1. Вертикальний стержень *AE* довжиною 6ℓ ($AB = BD = DE$), прикріплений за допомогою підп'ятника та підшипника в точках *A*, *D* (рис. 2.3), обертається зі сталою кутовою швидкістю ω. У точці *E* цього стержня прикріплений однорідний стержень *EK* масою m_1 і довжиною 6ℓ, а в точці *B* прикріплений невагомий стержень *MB* довжиною 2ℓ, до кінця якого прикріплено точковий тягар вагою m_2. Знайти реакції підшипника *D* та підп'ятника *A*.

Розв'язання. Система складається з однорідного стержня *EK* і точки *M*. Активними силами є сили ваги $\vec{P}_1$ і $\vec{P}_2$, які відповідно будуть дорівнювати $\vec{P}_1 = m_1 g$; $\vec{P}_2 = m_2 g$. При цьому сила $\vec{P}_1$ прикладена в центрі ваги *C* стержня, тобто в його середині. Звільнимо від в'язей вертикальний вал *AE* та замінюємо їх реакціями в'язей. Враховуючи, що стержні розташовані в площині *xy*, складові реакції підп'ятника будуть $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$ та підшипника – $\vec{X}_D$.

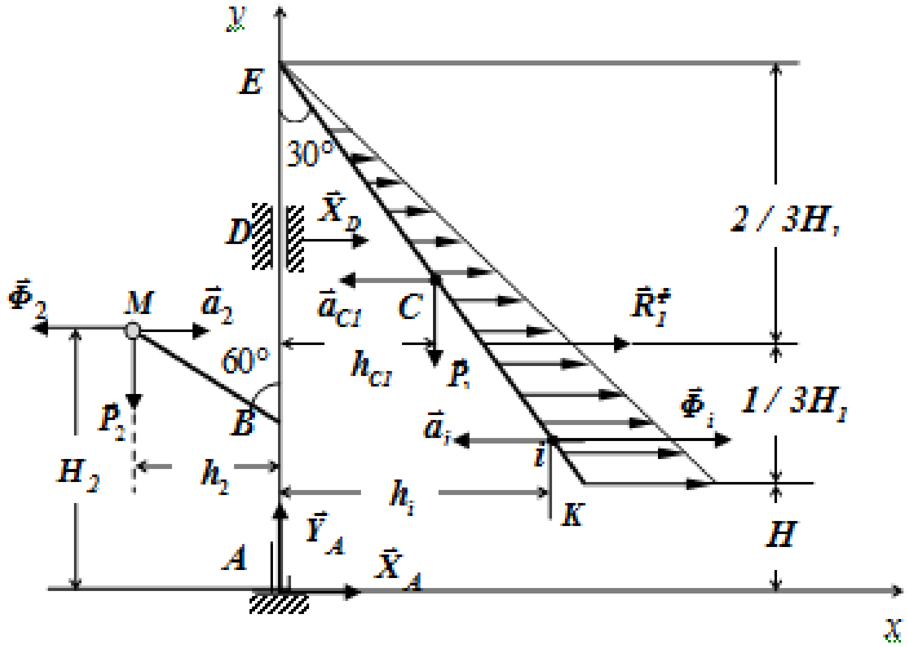

Рис. 2.3

Розв'язуючи задачу із застосуванням принципу Д'Аламбера, до системи прикладаємо сили інерції. При сталій кутовій швидкості всі точки стержня мають лише нормальні прискорення $\vec{a}_{ni}$, що спрямовані до осі обертання *y* і дорівнюють $a_{ni} = \omega^2 h_i$, де h_i – відстань від елементів до осі обертання. Тоді сили інерції Φ_i будуть мати напрям від осі обертання й дорівнюють $\Phi_i = m_i a_{ni} = m_i \omega^2 h_i$, де m_i – маса елементів. Оскільки Φ_i пропорційні відстані точки від осі обертання, то відцентрові сили інерції Φ_i розподілені вздовж стержня за законом трикутника. Знайдемо рівнодіючу системи паралельних сил інерції стержня $\vec{R}_1^\Phi$, яка дорівнює головному вектору цих сил:

$$R_1^\Phi = m_1 a_{C1} = m_1 \omega^2 h_{C1},$$

де h_{C1}– відстань центру мас стержня від осі обертання, $h_{C1} = 3\ell \sin 30°$.

Сила інерції точкової маси M дорівнює добутку її маси на прискорення:

$$\Phi_2 = m_2 a_2 = m_2 \omega^2 h_2 ,$$

де h_2 – відстань точки M від осі обертання, $h_2 \ell \sin 60°$.

З урахуванням виразів h_{C1} і h_2 сили інерції запишемо як

$$R_1^{\Phi} = m_1 \omega^2 3\ell \sin 30° , \;\; \Phi_2 = m_2 \omega^2 \ell \sin 60° .$$

При цьому лінія дії рівнодіючої $\vec{R}_1^{\Phi}$ – горизонтальна, проходить через центр ваги навантаження за рахунок розподілу сил інерції за законом трикутника.

Згідно з принципом Д'Аламбера активні сили, сили реакції, а також сили інерції, які прикладені до системи тіл, утворюють зрівноважену систему сил. Складаємо умови рівноваги для плоскої системи сил. Одержимо

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = R_1^{\Phi} + X_D - \Phi_2 + X_A = 0; \\ \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = Y_A - P_1 - P_2 = 0; \\ \sum_{i=1}^{n} m_A\left(\vec{F}_i\right) = -P_1 h_{C1} - R_1^{\Phi}\left(1/3\, H_1 + H\right) + P_2 h_2 + \Phi_2 H_2 - X_D AD = 0, \end{cases}$$

де $\left(1/3\, H_1 + H\right)$, H_2 – плечі сил R_1^{Φ}, Φ_2.

Враховуючи, що

$$H_1 = EK \cos 30° = 6\ell 0,866 = 5,2\ell ;$$

$$H = AE - EK \cos 30° = 6\ell - 6\ell 0,866 = 0,8\ell ,$$

одержимо:

$$\left(1/3\, H_1 + H\right) = 1/3 \cdot 5,2\ell + 0,8\ell = 2,53\ell ;$$

$$H_2 = 2\ell \cdot 0,5 + 2\ell = 3\ell .$$

Остаточно із систем рівнянь дістаємо

$$Y_A = P_1 + P_2 = g\left(m_1 + m_2\right);$$

$$X_D = \frac{-P_1 h_{C1} - R_1^{\Phi}\left(1/3\,H_1 + H\right) + P_2 h_2 + \Phi_2 H_2}{AD} =$$

$$= g\left(0,22m_2 - 0,38m_1\right) + \omega^2 \ell\left(0,65m_2 - 0,95m_1\right);$$

$$X_A = -R_1^{\Phi} - X_D + \Phi_2 = -g\left(0,22m_2 - 0,38m_1\right) + \omega^2 \ell\left(0,22m_2 - 0,55m_1\right).$$

2.2. Загальне рівняння динаміки

Відповідно до принципу Д'Аламбера ми можемо записати рівняння статики, якщо прикладемо до точки i силу інерції $\Phi_i = -m_i a_i$:

$$\vec{F}_i + \vec{R}_i + \vec{\Phi}_i = 0.$$

Тоді для всіх точок системи (рис. 2.4) запишемо

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i + \sum_{i=1}^{n} \vec{R}_i + \sum_{i=1}^{n} \vec{\Phi}_i = 0. \qquad (2.9)$$

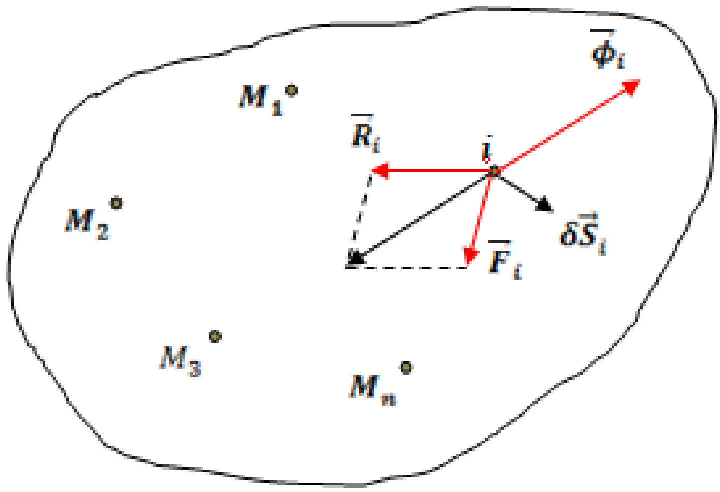

Рис. 2.4

Якщо надамо всім точкам системи можливі переміщення $\delta\vec{S}_i$ і помножимо рівняння (2.9) скалярно на $\delta\vec{S}_i$, то одержимо:

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\cdot\delta\vec{S}_i+\sum_{i=1}^{n}\vec{R}_i\cdot\delta\vec{S}_i+\sum_{i=1}^{n}\vec{\Phi}_i\cdot\delta\vec{S}_i=0. \tag{2.10}$$

Кожен з цих добутків являє собою роботу відповідних сил, отже, вираз (2.10) можна переписати:

$$\sum\delta A^{\text{акт}}+\sum\delta A^{\text{реак}}+\sum\delta A^{in}=0. \tag{2.11}$$

Якщо система підпорядкована ідеальними в'язями, то $\sum\delta A^{\text{реак}}=0$ і з виразу (2.11) отримаємо так зване **загальне рівняння динаміки**, або **принцип Д'Аламбера – Лагранжа**.

$$\sum\delta A^{\text{акт}}+\sum\delta A^{in}=0. \tag{2.12}$$

Сформулюємо цей принцип таким чином: *якщо на систему накладені ідеальні в'язі, то сума робіт активних сил і сил інерції на можливих переміщеннях точок системи буде дорівнювати нулю*.

Вимога ідеальності в'язей не є надзвичайно обмеженою, тому що реакції неідеальних в'язей (наприклад, сили тертя) можна включити формально як активні сили. Для розв'язання задач користуються загальним рівнянням у формі (2.12). Для виведення з нього рівнянь і принципів аналітичної механіки його приводять до аналітичної форми.

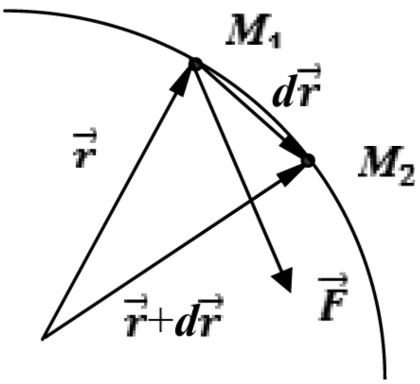

Рис. 2.5

Для фактичного обчислення елементарної роботи часто застосовуються її аналітичні вирази через проекції й момент сили. Вираз елементарної роботи сили $\vec{F}$ через радіус-вектор точки її прикладення згідно з рис. 2.5 має вигляд

$$dA=\vec{F}d\vec{r}, \tag{2.13}$$

де – $d\vec{r}$ приріст радіуса-вектора точки.

Розклавши співмножники виразу (2.13) по ортах:

$$\vec{F} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}\,; \quad d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$

і застосувавши формулу, яка виражає скалярний добуток двох векторів через проекції співмножників, отримаємо

$$dA = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz\,. \tag{2.14}$$

Якщо сила діє на тверде тіло, яке обертається навколо нерухомої осі, то зручніше її елементарну роботу виразити через момент сили. Нехай тіло обертається навколо осі *z*. Тоді, переходячи до полярних координат, маємо $X = \rho\cos\varphi$; $Y = \rho\sin\varphi$; $z = h$ (координата Z є сталою величиною).

Враховуючи сталість ρ (відстань точки від осі обертання), маємо:

$$dx = -\rho\sin\varphi\,d\varphi = -y\,d\varphi\,; \quad dy = \rho\cos\varphi\,d\varphi = x\,d\varphi\,; \quad dz = 0\,.$$

Підставивши диференціали координат у формулу (2.14) і винісши за дужки $d\varphi$, отримаємо $dA = d\varphi\left(-yX + xY\right)$. Вираз у дужках являє собою момент сили відносно осі обертання *z*. Остаточно маємо:

$$dA = M_z\,d\varphi\,.$$

Для зручності всі координати позначають літерою *x* (рис. 2.6), так що на площині координати *i*-ї точки будуть $\left(x_{2i-1}, x_{2i}\right)$ (у просторі відповідно $\left(x_{3i-2}, x_{3i-1}, x_{3i}\right)$). Тоді відповідно до аналітичного виразу роботи через проекції сил рівняння (2.12) набуде вигляду

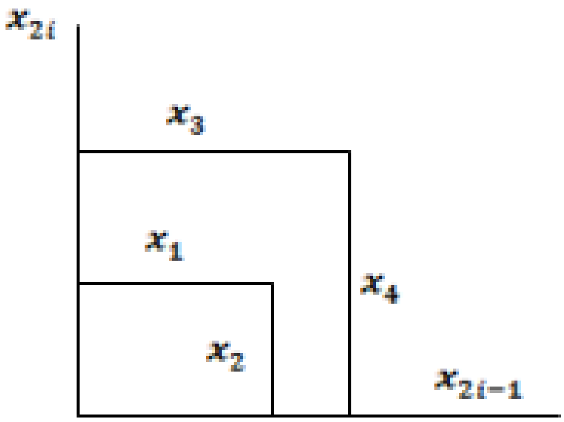

Рис. 2.6

$$\sum\left(x_i - m\ddot{x}_i\right)\delta x_i = 0\,.$$

Тут перший член у дужках – проекція активної сили, а другий – інерційний.

Методика та приклади розв'язання задач за допомогою загального рівняння динаміки. Розпочинаючи розв'язання задач за допомогою принципу Д'Аламбера – Лагранжа, слід зауважити, що система відомих сил: активних, реакції в'язей та сил інерції – задовольняє рівняння статики, тобто сума проекцій усіх сил на кожну з осей координат і сума їх моментів відносно будь-якої точки чи будь-якої осі дорівнює нулю.

Таким чином, принцип Д'Аламбера – загальний спосіб складання рівнянь, які необхідні для розв'язання задач динаміки системи, особливо для визначення динамічних реакції в'язей. Задачі, які входять до цієї теми, дозволяють:

1) знайти динамічні реакції в'язей;

2) визначати прискорення тіл системи.

Знайдемо динамічні реакції в'язей спочатку для системи тіл, які рухаються поступально, а потім для системи, у яких тіла мають обертальний рух навколо нерухомої осі.

Приклад 2.2. Два вантажі *A* і *B* вагою P_A і P_B з'єднані нерозтяжною ниткою (рис. 2.7), перекинутою через нерухомий блок, який обертається навколо нерухомої осі *O*. Вантажі рухаються по гранях нерухомої призми, при цьому коефіцієнт тертя дорівнює f. Знайти прискорення тіл *A* і *B* та силу натягу нитки, якщо кути α і β відомі.

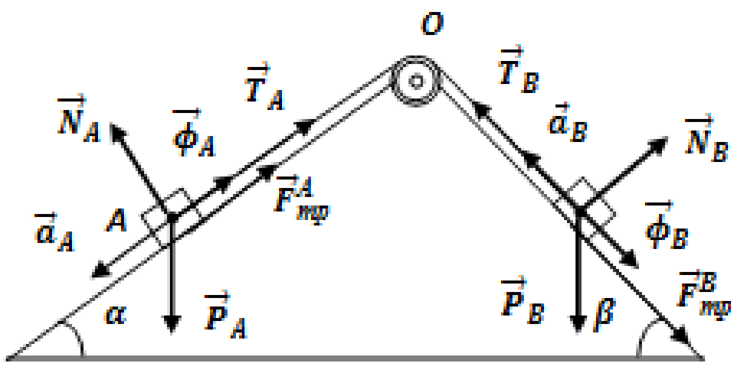

Рис. 2.7

Розв'язання. Кожне з тіл *A* і *B* рухається поступально та прямолінійно. Припустимо, що вантаж *A* опускається з прискоренням $\vec{a}_A$. Тоді вантаж *B* піднімається з прискоренням $\vec{a}_B$, при цьому прискорення за модулем рівні, тобто $\vec{a}_A = \vec{a}_B = \vec{a}$. Покажемо сили, які будуть діяти на тіла *A* та *B* певної системи. Сили тертя $\vec{F}^A_{тр}$ і $\vec{F}^B_{тр}$ прикладені відповідно до тіл A та B у протилежному напрямку руху. Сили реакції $\vec{N}_A$ і $\vec{N}_B$ мають напрям, перпендикулярний похилим площинам, на які спираються вантажі. Сили ваги $\vec{P}_A$ і $\vec{P}_B$ мають напрям вертикально униз. До вантажів A і B (див. рис. 2.7) прикладемо, крім вказаних вище сил, ще сили натягу мотузки $\vec{T}_A$ та $\vec{T}_B$, при цьому $T_A = T_B = T$. Згідно з принципом Д'Аламбера, прикладемо до тіл A та B сили інерції, які спрямовані протилежно прискоренням та за модулем дорівнюють

$$\Phi_A = \frac{P_A}{g} a; \;\; \Phi_B = \frac{P_B}{g} a.$$

Тоді за принципом Д'Аламбера ця система перебуває в рівновазі. Розділивши цю систему, складаємо рівняння рівноваги для кожного тіла окремо. Для цього спроектуємо всі сили, які прикладені до тіла A (рис. 2.8), на осі Ox_1 і Oy_1, а сили, які прикладені до тіла B (рис. 2.9) на осі Ox_2 і Oy_2.

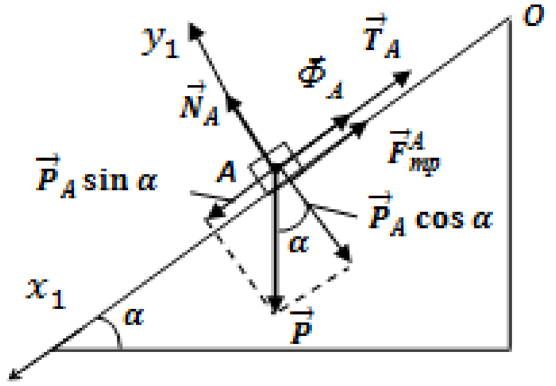

Рис. 2.8

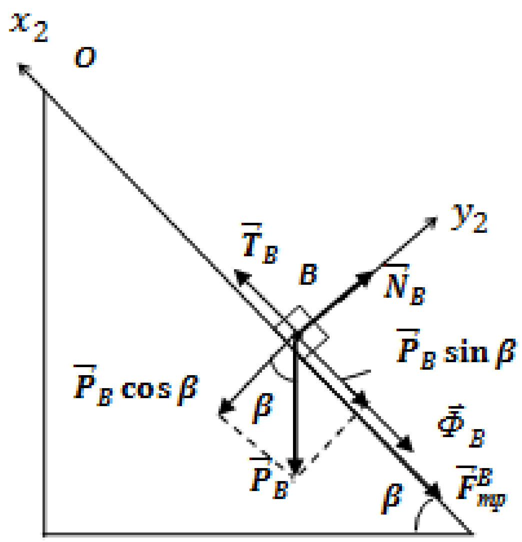

Рис. 2.9

Таким чином, для кожного тіла маємо плоску збіжну систему сил, умовою рівноваги якої є два рівняння рівноваги.

Для тіла A:

$$1) \sum F_{ix} = P_A \sin\alpha - T_A - F^A_{\text{тр}} - \Phi_A = 0;$$

$$2) \sum F_{iy} = N_A - P_A \cos\alpha = 0.$$

Для тіла B:

$$3)\ \sum F_{ix} = T_B - P_B \sin\beta - F_{\text{тр}}^B - \Phi_B = 0;$$

$$4)\ \sum F_{iy} = N_B - P_B \cos\beta = 0.$$

З другого й четвертого рівнянь знайдемо сили реакції $\vec{N}_A$ і $\vec{N}_B$:

$$N_A = P_A \cos\alpha;\ \ N_B = P_B \cos\beta.$$

Отже, сили тертя будуть дорівнювати

$$F_{\text{тр}}^A = N_A f = P_A \cos\alpha\, f;\ \ F_{\text{тр}}^B = N_B f = P_B \cos\beta\, f.$$

Підставимо значення сил тертя та сил інерції в перше й третє рівняння. Враховуючи, що $T_A = T_B = T$, отримаємо:

$$\Phi_A = \frac{P_A}{g} a = P_A \sin\alpha - T - P_A \cos\alpha\, f;$$

$$\Phi_B = \frac{P_B}{g} a = T - P_B \sin\beta - P_B \cos\beta\, f.$$

Звідси знайдемо:

$$a = \frac{P_A(\sin\alpha - f\cos\alpha) - P_B(\sin\beta - f\cos\beta)}{P_A + P_B} g;$$

$$T = \frac{P_A P_B\left[\sin\alpha + \sin\beta - f(\cos\alpha + \cos\beta)\right]}{P_A + P_B} =$$

$$= \frac{2P_A P_B}{P_A + P_B} \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + f\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\right).$$

Приклад 2.3. Два однорідні стержні OA і OB (рис. 2.10) вагою P кожний прикріплені за допомогою шарніра O до вертикального стержня OD, а їх кінці A і B підвішені нерозтяжною ниткою до точки D цього стержня. Трикутник AOB починає обертатися навколо осі OD

з постійною кутовою швидкістю ω. Знайти натяг нитки T і реакцію шарніра O, яка прикладена до стержня OB, коли і $\angle DOB = \varphi$.

Розв'язання. До стержня OB, який обертається рівномірно навколо осі OD, прикладені відома сила $\vec{P}$, реакції $\vec{X}_O, \vec{Y}_O$ шарніра O і реакція $\vec{T}$ нитки. Згідно з принципом Д'Аламбера розіб'ємо стержень OB на нескінченно малі елементи й прикладемо до кожного елемента силу інерції $\vec{f}_k^{\,i}$, яка спрямована протилежно прискоренню $\vec{a}_k$ і дорівнює за модулем $f_k^i = m_k a_k$, де m_k – маса елемента. Припустимо, що елемент розташований на відстані s_k від точки O, тоді $a_k = r_k\omega^2 = (s_k \sin\varphi)\omega^2$ і відповідно $f_k^i = m_k\omega^2 s_k \sin\varphi$. Сила $\vec{P}$, реакції $\vec{X}_O, \vec{Y}_O, \vec{T}$ і сили інерції $\vec{f}_k^{\,i}$, які прикладені до кожного елемента стержня OB, взаємно зрівноважені. Тоді будемо мати три рівняння рівноваги:

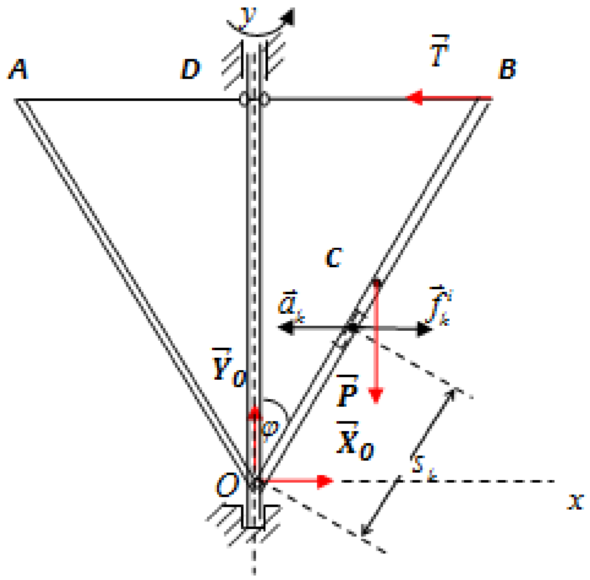

Рис. 2.10

$$\sum F_{ix} = X_O - T + \sum f_k^i = 0;$$

$$\sum F_{iy} = Y_O - P = 0;$$

$$\sum M_O\left(\vec{F}_i\right) = -P\frac{a}{2}\sin\varphi + Ta\cos\varphi - \sum f_k^i s_k \cos\varphi = 0.$$

Обчислимо суми сил інерції:

$$\sum f_k^i = \sum m_k\omega^2 s_k \sin\varphi = \omega^2 \sin\varphi \sum m_k s_k\ ;$$

$$\sum f_k^i s_k \cos\varphi = \sum m_k\omega^2 {s_k}^2 \sin\varphi\cos\varphi = \omega^2 \sin\varphi\cos\varphi \sum m_k s_k^2\ .$$

Але за формулою координат центру ваги C одержимо

$$\sum m_k s_k = Ms_C = \frac{P}{g}\frac{a}{2};$$

$$\sum m_k s_k^2 = I_O = \frac{Ma^2}{3} = \frac{Pa^2}{3g},$$

де I_O – момент інерції стержня OB відносно точки O.

Тоді рівняння рівноваги набувають вигляду

$$X_O - T + \frac{Pa}{2g}\omega^2 \sin\varphi = 0; \quad Y_O - P = 0;$$

$$-P\frac{a}{2}\sin\varphi + Ta\cos\varphi - \frac{Pa^2}{3g}\omega^2 \sin\varphi\cos\varphi = 0.$$

Знайдемо реакції з цих рівнянь:

$$Y_O = P; \quad T = \frac{P}{2}\left(\mathrm{tg}\,\varphi + \frac{2a}{3g}\omega^2 \sin\varphi\right);$$

$$X_O = T - \frac{Pa}{2g}\omega^2 \sin\varphi = \frac{P}{2}\left(\mathrm{tg}\,\varphi + \frac{a}{3g}\omega^2 \sin\varphi\right).$$

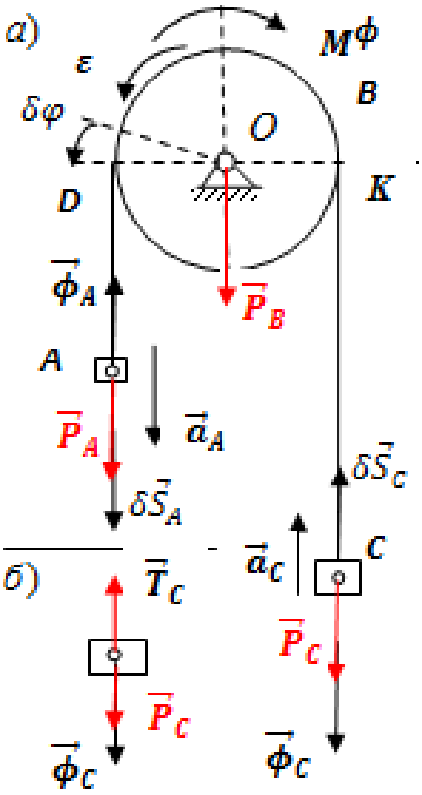

Рис. 2.11

Приклад 2.4. До шківа радіусом R (рис. 2.11) прикладено обертальний момент M; вантажі тіл дорівнюють P_A і P_C. Визначати прискорення тіл A і C та натяг тросів AD і CK, вважаючи шків однорідним круглим циліндром вагою P_B. Масою троса й тертям знехтувати.

Розв'язання. Ця система складаєтьсят з трьох тіл A, B, C. Зображуємо графічно сили ваги тіл системи спрямованими вертикально вниз P_A, P_B, P_C. Тіла A і C здійснюють поступальний рух. Припустимо, що прискорення $\vec{a}_A$ вантажу A спрямоване донизу, а прискорення $\vec{a}_C$ тіла C – вгору. Тоді блок B здійснює обертальний рух з кутовим прискоренням ε проти руху годинникової стрілки. Згідно з принципом Д'Аламбера прикладемо до тіл A і C рівнодійні сил інерції елементарних мас кожного з цих тіл, які спрямовані протилежно їх прискоренням $\vec{a}_A$ і $\vec{a}_C$ і дорівнюють

$$\left.\begin{aligned} \Phi_A &= \frac{P_A}{g} a_A, \\ \Phi_C &= \frac{P_C}{g} a_C. \end{aligned}\right\} \tag{2.15}$$

Система сил інерції блока B зводиться до пари сил з моментом $\vec{M}^{\Phi} = -I_B \vec{\varepsilon}$ де $I_B = \dfrac{P_B R^2}{2g}$ – осьовий момент інерції однорідного блока (R – радіус блока). Зображуємо момент сил інерції блока дуговою стрілкою (рис. 2.11), яка охоплює блок, відповідає вектору моменту, протилежному вектору прискорення ε, і дорівнює

$$M^{\Phi} = \frac{P_B R^2}{2g} \varepsilon. \tag{2.16}$$

Надамо системі можливого переміщення. Якщо можливе переміщення $\delta\vec{S}_A$ вантажу A спрямоване вертикально донизу, то блок B здійснить обертальне можливе переміщення на кут $\delta\varphi$ проти руху годинникової стрілки, а тіло C – поступальне можливе переміщення $\delta\vec{S}_C$ вгору. Складаємо загальне рівняння динаміки. Запишемо алгебраїчну суму елементарних робіт активних сил та сил інерції $\vec{\Phi}_A$, $\vec{\Phi}_C$ на можливих переміщеннях їх точок прикладення та прирівняємо їх до нуля:

$$P_A \delta S_A - P_C \delta S_C - \Phi_A \delta S_A - \Phi_C \delta S_C - M^{\Phi} \delta\varphi = 0. \tag{2.17}$$

Оскільки механічна система має один степінь вільності, то тільки одне можливе переміщення буде незалежним. З умов нерозтяжності троса випливає, що $\delta S_A = \delta S_C$.

Оскільки в'язі стаціонарні, дійсні переміщення є одними з можливих, тобто можна записати $\delta\varphi = \dfrac{\delta S_A}{R}$.

Тоді загальне рівняння динаміки (2.17) після підстановки формул (2.15), (2.16) та, враховуючи можливі переміщення, які виражені через незалежне переміщення δS_A, набуває вигляду

$$P_A \delta S_A - P_C \delta S_A - \frac{P_A}{g} a_A \delta S_A - \frac{P_C}{g} a_C \delta S_A - \frac{P_B R^2}{2g} \varepsilon \frac{\delta S_A}{R} = 0. \qquad (2.18)$$

Відповідно залежності можливих переміщень та прискорень вантажів однакові:

$$\left.\begin{aligned} a_C = a_A = a; \\ \varepsilon = a/R. \end{aligned}\right\} \qquad (2.19)$$

Тоді загальне рівняння динаміки (2.18) після підстановки формул (2.19) набуває вигляду

$$\delta S_A \left(P_A - P_C - \frac{2P_A + 2P_C + P_B}{2g} a \right) = 0.$$

Оскільки можливе переміщення δS_A є довільним, тобто $\delta S_A \neq 0$, нулю дорівнює вираз у дужках:

$$P_A - P_C - \frac{2P_A + 2P_C + P_B}{2g} a = 0.$$

З останнього співвідношення визначимо прискорення

$$a_A = a_C = a = \frac{P_A - P_C}{2P_A + 2P_C + P_B} 2g.$$

Для визначення сили натягу T_C троса *CK* розділимо систему й розглянемо окремо тіло *C*, до якого прикладені сила P_C, сила інерції $\vec{\Phi}_C$, реакція троса $\vec{T}_C$ (рис. 2.11, *б*). Оскільки ці сили зрівноважені, то

$$T_C - P_C - \Phi_C = 0.$$

Звідси

$$T_C = P_C + \Phi_C = P_C + \frac{P_C}{g}a = P_C\left(1 + \frac{1}{g}a\right).$$

З урахуванням виразу для прискорення a запишемо

$$T_C = P_C\left(\frac{4P_A + P_B}{2P_A + 2P_C + P_B}\right).$$

Розглядаючи потім рівновагу тіла A, окремо аналогічно знайдемо сили натягу T_A троса AD:

$$T_A = P_A\left(\frac{4P_C + P_B}{2P_A + 2P_C + P_B}\right).$$

2.3. Принцип можливих переміщень

Якщо всі точки механічної системи перебувають у рівновазі, то їх прискорення $a_i = 0$, а отже, і відповідні інерційні сили Φ_i дорівнюють нулю. Тоді сума робіт цих сил на можливих переміщеннях $\delta\vec{S}_i$ теж дорівнює нулю $\sum \Phi_i \delta\vec{S}_i = 0$, і з рівняння (2.12) отримаємо **умову рівноваги механічної системи з ідеальними в'язями**:

$$\sum \delta A^{\text{акт}} = 0 \tag{2.20а}$$

або

$$\sum \vec{F}_i \delta\vec{S}_i = 0, \tag{2.20б}$$

де $\vec{F}_i$ – активні сили;

$\delta\vec{S}_i$ – можливі переміщення (i – 1, 2, …, n).

Це рівняння й виражає **принцип можливих переміщень**: *якщо механічна система, яка підпорядкована ідеальним в'язями, перебуває в рівновазі, то сума можливих робіт активних сил дорівнює нулю*.

Доведемо необхідність та достатність виконання умов (2.20а), (2.20б) для рівноваги механічної системи.

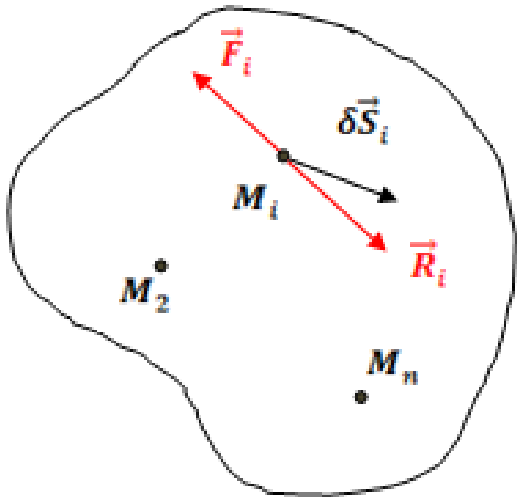

Рис. 2.12

Необхідність. Розглянемо систему n матеріальних точок (рис. 2.12), яка перебуває в стані рівноваги та підпорядковується стримувальним стаціонарним ідеальним в'язям. Користуючись аксіомою про звільнення від в'язей, звільнимо від в'язей механічну систему, тоді на неї діятимуть активні сили $\vec{F}_i$ і реакції в'язей $\vec{R}_i$ (i – 1, 2, …, n). Оскільки система перебуває в стані рівноваги, то і кожна точка цієї системи також перебуває в стані рівноваги. Отже, для кожної точки системи виконується умова

$$\vec{F}_i + \vec{R}_i = 0. \qquad (2.21)$$

Надамо точкам системи можливих переміщень $\delta\vec{S}_i$ і обчислимо роботу активних сил і сил реакції в'язей на цих переміщеннях для кожної точки:

$$\left(\vec{F}_i + \vec{R}_i\right)\delta\vec{S}_i = 0.$$

Тоді для всієї системи

$$\sum_{i=1}^{i=n}\left(\vec{F}_i + \vec{R}_i\right)\delta\vec{S}_i = 0$$

або

$$\sum_{i=1}^{i=n}\vec{F}_i\delta\vec{S}_i + \sum_{i=1}^{i=n}\vec{R}_i\delta\vec{S}_i = 0. \qquad (2.22)$$

Враховуючи умови ідеальних в'язей , тобто $\sum\vec{R}_i\delta\vec{S}_i = 0$, перетворимо вираз (2.22) і одержимо

$$\sum_{i=1}^{i=n}\vec{F}_i\delta\vec{S}_i = 0.$$

Достатність. Припустимо, що механічна система починає рухатись із стану рівноваги й точки будуть мати дійсні переміщення. Але дійсні переміщення входять до можливих переміщень, якщо обмежитися розглядом лише стаціонарних в'язей. Застосуємо теорему про зміну кінетичної енергії: $\delta T = \delta A$. Оскільки рух системи здійснювався зі стану спокою, то $\delta T > 0$, тоді й $\delta A > 0$, що суперечить умовам (2.20а).

Таким чином, коли прикладені сили задовольняють умову (2.20а), то система не може вийти зі стану спокою. Отже, умова (2.20а) є не тільки необхідною, а й достатньою умовою рівноваги системи, яка підпорядковується стримувальним в'язям. Рівняння (2.20б) можна подати в аналітичній формі

$$\sum_{i=1}^{i=n} \left(F_{ix}\delta x_i + F_{iy}\delta y_i + F_{iz}\delta z_i \right) = 0 .$$

Співвідношення (2.20а) ще називають *загальним рівнянням статики*.

Принцип можливих переміщень дозволяє розв'язувати багато задач статики, не вдаючись до розчленування системи на окремі тіла. Розглянемо, наприклад, механізм, зображений на рис. 2.13. Необхідно визначити силу P_3, яка прикладена до ланки AB й утримує механізм у рівновазі (ваги P_1 і P_2 прикладені в середині відповідних стержнів однакової довжини).

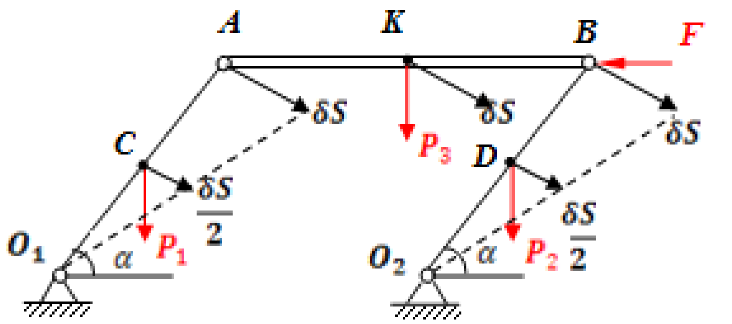

Рис. 2.13

Розв'язання цієї задачі методами статики потребує розчленування цієї системи на тіла O_1A, O_2B і AB і складання дев'яти рівнянь (по три для кожного тіла). У ці дев'ять рівнянь статики, окрім сили F, увійдуть ще вісім рівнянь невідомих сил (чотири складні реакції в шарнірах O_1, O_2, A, B). Розв'язання такої системи рівнянь є досить складним. Проте за допомогою принципу можливих переміщень задача розв'язується легко: оскільки рух тіла AB поступальний, то переміщення точок A і B, K рівні між собою $\delta S_A = \delta S_B = \delta S_K = \delta S$, а переміщення $\delta S_C = \delta S_D = \delta S/2$, оскільки точки прикладення сил ваги стержнів розташовані в середині стержнів (див. рис. 2.13).

$$\sum \delta A = P_1 \frac{\delta S}{2} \cos\alpha + P_2 \frac{\delta S}{2} \cos\alpha + P_3 \frac{\delta S}{2} \cos\alpha + F\delta S \sin\alpha = 0,$$

після скорочення на δS легко знаходимо P_3.

2.4. Виведення рівнянь статики твердого тіла з принципу можливих переміщень

Розглянемо вільне тверде тіло, яке має шість степенів вільності (незалежними переміщеннями є переміщення δx, δy, δz довільно вибраного полюса 0 і нескінченно малі повороти навколо координатних осей, які проходять через полюс).

Нехай на це тіло діють сили $\vec{F}(i-1, 2, ..., n)$. Надамо йому поступального переміщення δx. Тоді робота сили $\vec{F}_i$ буде дорівнювати $F_{xi}\delta x$ і $\sum A = \sum F_{xi}\delta x = \delta x \sum F_{xi} = 0$. Але $\delta x \neq 0$, отже: $\sum F_{xi} = 0$. Аналогічно виводяться два інші рівняння проекцій: $\sum F_{yi} = 0$, $\sum F_{zi} = 0$. Тепер надамо тілу нескінченно малий поворот $\delta\alpha$ навколо осі x. Елементарна робота сил $\vec{F}_i$ буде дорівнювати добутку моменту сили на кут повороту:

$$\sum A = \sum M_x \delta\alpha = \delta\alpha \sum M_x = 0; \quad \delta\alpha \neq 0.$$

Отже, $\sum M_x = 0$ і аналогічно отримаємо рівняння моментів відносно інших осей: $\sum M_y = 0, \sum M_z = 0$. Отже, одержали умови рівноваги просторової системи сил:

$$\sum F_{xi} = 0; \;\; \sum F_{yi} = 0; \;\; \sum F_{zi} = 0; \;\; \sum M_x = 0; \;\; \sum M_z = 0.$$

З цього випливає, що кількість незалежних рівнянь статики визначається кількістю степенів вільності.

Методика та приклади розв'язання задач за допомогою принципу можливих переміщень. Задачі, які входять до цієї теми, дозволяють:

1) визначати сили, що діють на систему, чи знайти залежність між цими силами;

2) знайти реакції в'язей.

Розпочинаючи розв'язання задач, треба визначати спочатку кількість степенів вільності механічної системи. Розглянемо методику розв'язання задач, коли система має один степінь вільності. У цьому випадку доцільно дотримуватися такої послідовності:

1. Зобразити всі активні сили, що діють на механічну систему.

2. Надати системі можливих переміщень та показати на кресленні елементарні переміщення δS_i точок прикладення сил, кути $\delta\varphi_к$ елементарного повороту тіл, на які діють сили.

3. Обчислити елементарну роботу активних сил на всіх певних можливих переміщеннях згідно з формулами:

$$\delta A_i^{\text{a}} = F_{i\tau}^{\text{a}} \delta S_i = F_i^{\text{a}} \delta S_i \cos\alpha_i \quad \text{або} \quad \delta A_i^{\text{a}} = m_o\left(\vec{F}_i^{\text{a}}\right)\delta\varphi_i .$$

4. Скласти умови (2.20а).

5. Встановити залежність між можливим переміщенням і переміщеннями δS_i, $\delta\varphi_i$, які увійшли в рівняння (2.20а), та виразити ці величини через будь-яку одну.

6. Підставити одержані вирази можливих переміщень через один у рівняння (2.20а) та знайти невідому силу, залежність між силами або реакції в'язей.

Розглянемо задачі першого типу, де знайдемо залежність між силами.

Приклад 2.5. Два невагомих стержні *AB* і *BC* з'єднані шарніром *B*, до якого прикладена сила $\vec{Q}$ під кутом β до горизонтального стержня. Кінець *C* і кінець *A* стержнів шарнірно прикріплені відповідно до стіни та повзуна, який може ковзати уздовж підлоги без тертя. Яку горизонтальну силу $\vec{P}$ треба прикласти до повзуна, щоб система за відомих кутів α і β перебувала в рівновазі (рис. 2.14).

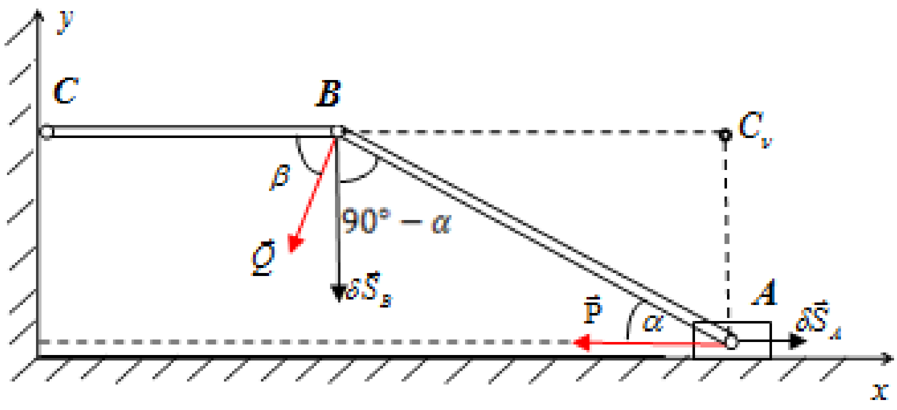

Рис. 2.14

Розв'язання. Зобразивши всі сили, які діють на систему, надаємо системі можливих переміщень. Для точки A можливе переміщення $\delta\vec{S}_A$ спрямоване паралельно осі x, а можливе переміщення $\delta\vec{S}_B$ точки B спрямовано по дотичній до траєкторії, яку описує точка B, тобто перпендикулярно стержню CB вертикально униз. Згідно з принципом можливих переміщень підрахуємо роботу всіх активних сил на можливих переміщеннях:

$$\sum \delta A = -P\delta S_A + Q\delta S_B \cos\left(90^0 - \beta\right) = 0$$

або

$$\sum \delta A = -P\delta S_A + Q\delta S_B \sin\beta = 0 . \tag{2.23}$$

Встановимо залежність між можливими переміщеннями $\delta\vec{S}_A$ та $\delta\vec{S}_B$. Це можна виконати двома способами:

1) за допомогою теореми про проекції швидкостей двох точок тіла;

2) за допомогою миттєвого центру швидкостей.

Розглянемо перший спосіб. На основі теореми про проекції швидкостей двох точок тіла запишемо, що проекції можливих переміщень точок A і B на пряму AB, що з'єднує їх, рівні між собою:

$$\delta S_A \cos\alpha = \delta S_B \cos\left(90^0 - \alpha\right) = 0$$

або

$$\delta S_A \cos\alpha = \delta S_B \sin\alpha .$$

Залежність між $\delta\vec{S}_A$ та $\delta\vec{S}_B$ така:

$$\delta S_A = \delta S_B \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}. \tag{2.24}$$

Підставимо вираз (2.24) у рівняння (2.23), дістанемо

$$\sum \delta A = -P\delta S_B \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + Q\delta S_B \sin\beta = 0.$$

Оскільки $\delta S_B \neq 0$, після очевидних спрощень маємо:

$$P = Q\frac{\sin\beta\cos\alpha}{\sin\alpha} = Q\sin\beta\operatorname{ctg}\alpha.$$

Розглянемо другий спосіб. Знайдемо залежність між $\delta\vec{S}_A$ та $\delta\vec{S}_B$ за допомогою миттєвого центру швидкостей стержня *AB*, який лежить на перетині перпендикулярів, які проведені з точок *A* і *B* до векторів $\delta\vec{S}_A$ та $\delta\vec{S}_B$. Тоді можливі переміщення точок *A* і *B* так само, як швидкості, пропорційні відстані цих точок до миттєвого центру швидкостей стержня *AB*, тобто

$$\frac{\delta\vec{S}_B}{\delta\vec{S}_A} = \frac{BC_V}{AC_V}.$$

З трикутника $AC_V\ B$ за допомогою теореми синусів маємо:

$$\frac{BC_V}{AC_V} = \frac{\sin\left(90^0 - \alpha\right)}{\sin\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Отже,

$$\delta\vec{S}_B \big/ \delta\vec{S}_A = \cos\alpha / \sin\alpha.$$

Залежність між $\delta\vec{S}_A$ та $\delta\vec{S}_B$ така сама, як у виразі (2.24):

$$\delta\vec{S}_A = \delta\vec{S}_B \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

Розглянемо задачі другого типу, де знайдемо реакції в'язей.

Приклад 2.6. На рис. 2.15, *а* зображена драбина *ACB*. Дві її однакові сторони *AC* і *CB* з'єднуються шарнірами в точці *C*, а кінці *A* і *B* спираються на підлогу. Вага кожної сторони драбини дорівнює *P*. Визначати реакцію опори в точці *B*, якщо

$$AC = CB = \ell, \quad \angle CAB = \angle CBA = 60^\circ .$$

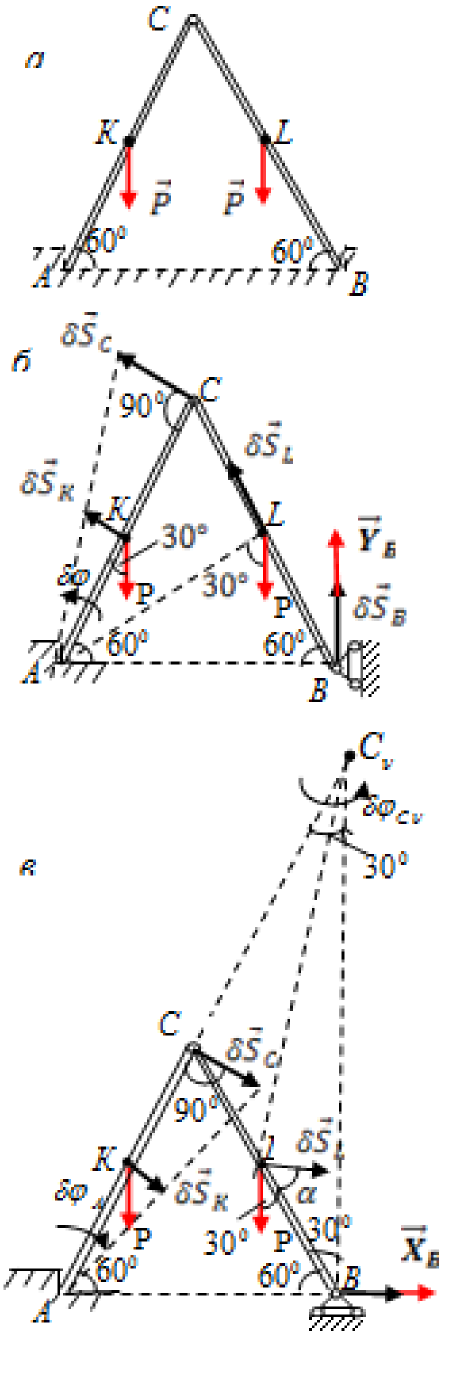

Рис. 2.15

Розв'язання. Покажемо на рис. 2.15, *б* активні сили – сили ваги кожної сторони драбини *P*, які прикладені в точках *K*, *L* середини сторін драбини *AC* і *CB*. Для визначення вертикальної складової $\vec{Y}_B$ реакції опори в точці *B* надаємо опорі *B* можливий рух у вертикальному напрямку (рис. 2.15, *б*). Замінимо підлогу в точці *B* на шарнірно рухому опору, яка може переміщатися у вертикальному напрямку. Прикладемо в точці *B* реакцію $\vec{Y}_B$. Надаємо можливого переміщення $\delta\vec{S}_B$ у точці *B* у вертикальному напрямку. При цьому права половина драбини здійснює плоский рух, а ліва половина – обертальний рух навколо осі *A*. Спрямуємо можливе переміщення $\delta\vec{S}_C$ у точці *C* перпендикулярно до *AC*, знайдемо положення миттєвого центру швидкостей сторони *CB*. Для цього проведемо перпендикуляри до $\delta\vec{S}_B$ і $\delta\vec{S}_C$ з точок *C* і *B*, які перетнуться в точці *A*. Таким чином точка *A* є миттєвим центром швидкостей сторони *CB* та центром обертання сторони *AC*. Отже, уся драбина набуває можливого кутового переміщення δφ навколо точки *A* проти ходу годинникової стрілки. Враховуючи, що $\delta\vec{S}_K \perp AK$,

$\delta\vec{S}_L \perp AL$, та використовуючи загальне рівняння статики, знайдемо суму робіт активних сил та реакції

$$\sum \delta A = P\delta S_K \cos 120° + P\delta S_L \cos 150° + Y_B \delta S_B = 0\,. \qquad (2.25)$$

Виразимо лінійні можливі переміщення $\delta\vec{S}_K, \delta\vec{S}_L, \delta\vec{S}_B$ через кутове $\delta\varphi$:

$$\delta S_K = \delta\varphi AK;\ \ \delta S_L = \delta\varphi\, AL;\ \ \delta S_B = \delta\varphi\, AB\,. \qquad (2.26)$$

Підставимо вираз (2.26) у рівняння (2.25) та після очевидних спрощень одержимо:

$$\sum \delta A = -P\delta\varphi\, AK \sin 30^{\circ} - P\delta\varphi\, AL \sin 60° + Y_B \delta\varphi AB = 0\,. \qquad (2.27)$$

З умов задачі відомо, що

$$AK = KC = CL = LB = \frac{\ell}{2},\ \ AC = CB = AB = \ell\,. \qquad (2.28)$$

Тоді з трикутника ACL знайдемо

$$AL = \sqrt{AC^2 - CL^2} = \sqrt{\ell^2 - \left(\frac{\ell}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\ell\,. \qquad (2.29)$$

Враховуючи, що $\delta\varphi \neq 0$, скорочуємо на $\delta\varphi$ та, підставивши вирази (2.28), (2.29) в рівняння (2.27), дістанемо:

$$\sum \delta A = -P\frac{\ell}{2}\frac{1}{2} - P\frac{\sqrt{3}\ell}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} + Y_B\ell = 0$$

або

$$\sum \delta A = -P\frac{\ell}{2}\frac{1}{2} - P\frac{\sqrt{3}\ell}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} + Y_B\ell = 0\,.$$

Звідси $Y_B = P$.

Для визначення горизонтальної складової X_B опорної реакції в точці *B* надаємо опорі *B* рух у горизонтальному напрямку. Звільнимо сторону *BC* драбини від підлоги в точці *B* та замінимо її шарнірно рухомою опорою, яка може рухатись у горизонтальному напрямку (рис. 2.15, *в*). Прикладемо в точці *B* реакцію $\vec{X}_B$. Надаємо можливого переміщення $\delta\vec{S}_B$ точці *B* у горизонтальному напрямку. При цьому права половина драбини здійснює плоский рух, а ліва половина обертається навколо точки *A*. Спрямуємо можливе переміщення $\delta\vec{S}_C$ перпендикулярно до *AC*, визначимо положення миттєвого центру обертання сторони *BC* у точці C_V за допомогою перпендикулярів, проведених з точок *C* і *B* до можливих переміщень $\delta\vec{S}_B$ і $\delta\vec{S}_C$.

Таким чином, ліва половина *AC* драбини обертається навколо *A* на кут $\delta\varphi_A$ за напрямом руху годинникової стрілки, а права половина *CB* драбини – навколо C_V на кут $\delta\varphi_{C_V}$ проти руху годинникової стрілки.

Враховуючи, що $\delta\vec{S}_C \perp CC_V$, $\delta\vec{S}_L \perp LC_V$, $\delta\vec{S}_B \perp BC_V$ та використовуючи загальне рівняння статики, знайдемо суму робіт активних сил та реакції

$$\sum \delta A = P\delta S_K \cos 60^\circ + P\delta S_L \cos\left(30^\circ + \alpha\right) + X_B \delta S_B = 0, \qquad (2.30)$$

де

$$\left.\begin{aligned} \delta S_K &= AK\delta\varphi_A; \\ \delta S_B &= BC_V\delta\varphi_{C_V}; \\ \delta S_L &= LC_V\delta\varphi_{C_V}. \end{aligned}\right\} \qquad (2.31)$$

Знайдемо залежність між можливими кутами переміщення $\delta\varphi_A$ і $\delta\varphi_{C_V}$. При цьому враховуємо, що шарнір *C* належить двом сторонам драбини , і тоді

$$\delta S_C = AC\delta\varphi_A, \ \delta S_C = CC_V\delta\varphi_{C_V}$$

Отже,

$$AC\delta\varphi_A = CC_V\delta\varphi_{C_V}, \ \delta\varphi_{C_V} = \frac{AC}{CC_V}\delta\varphi_A$$

Як бачимо, $CC_V = AC$ (трикутник BCC_V є рівнобедрений), тоді $\delta\varphi_{C_V} = \delta\varphi_A$.

Враховуючи рівність кутів та вираз (2.31), перетворимо рівняння (2.30):

$$\sum \delta A = P \cdot AK\delta\varphi_A \cos 60° + P \cdot LC_V \delta\varphi_A \cos\left(30° + \alpha\right) +$$

$$+X_B BC_V \delta\varphi_A = 0. \quad (2.32)$$

З прямокутного трикутника ABC_V знайдемо BC_V, а з трикутника BLC_V – LC_V.

$$BC_V = \sqrt{\left(AC_V\right)^2 - \left(AB\right)^2} = \sqrt{2\ell^2 + \ell^2} = \ell\sqrt{3};$$

$$LC_V = \sqrt{\left(BC_V\right)^2 - \left(LB\right)^2 - 2BC_V LB \cos 60°} =$$

$$= \sqrt{3\ell^2 + \frac{\ell^2}{4} - 2\ell\sqrt{3}\frac{\ell}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{7}}{2}\ell. \quad (2.33)$$

Застосуємо теорему синусів та знайдемо кут α з трикутника BLC_V:

$$\frac{BC_V}{\sin\left(90° + \alpha\right)} = \frac{LC_V}{\sin 30°},$$

звідки

$$\sin\left(90° + \alpha\right) = \cos\alpha = \frac{BC_V \sin 30°}{LC_V} = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}\frac{2}{\sqrt{7}\ell} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}. \quad (2.34)$$

Після скорочення на $\delta\varphi_A$ та враховуючи (2.33), (2.34), рівняння (2.32) набуває вигляду:

$$\sum \delta A = P\frac{\ell}{2}\frac{1}{2} + P\frac{\sqrt{7}}{2}\ell\cos\left(30° + \alpha\right) + X_B \ell\sqrt{3} = 0. \quad (2.35)$$

Враховуючи формули тригонометрії, одержимо

$$\cos\left(30° + \alpha\right) = \cos 30° \cos\alpha - \sin 30° \sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} - \frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{7}} = \frac{1}{2\sqrt{7}}, \quad (2.36)$$

де $\sin\alpha$ знаходимо з формули $\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha}$.

Після скорочення на ℓ та з урахуванням (2.36) рівняння (2.35) набуває вигляду:

$$\sum \delta A = P\frac{1}{4} + P\frac{\sqrt{7}}{2}\frac{1}{2\sqrt{7}} + X_B\sqrt{3} = P\frac{1}{2} + X_B\sqrt{3} = 0\,.$$

Тоді

$$X_B = -\frac{P}{2\sqrt{3}}\,.$$

Запитання та завдання для самоперевірки

1. Як формулюється принцип Д'Аламбера – Лагранжа?
2. Як формулюється принцип можливих переміщень?
3. Для яких в'язей справедливий принцип можливих переміщень?
4. Як отримати із принципу Д'Аламбера загальне рівняння динаміки?
5. Як із загального рівняння динаміки отримати принцип можливих переміщень?
6. Як отримати рівняння статики з принципу можливих переміщень?
7. У чому полягає суть методики розв'язання задач за допомогою принципу Д'Аламбера?
8. У чому полягає суть методики розв'язання задач за допомогою принципу можливих переміщень?
9. У чому полягає суть методики розв'язання задач за допомогою загального рівняння динаміки?

РОЗДІЛ 3

Диференціальні рівняння руху матеріальної системи

Рівняння руху системи, в аналітичній механіці відоме як рівняння Лагранжа другого роду, можна одержати із загального рівняння динаміки. Цей метод Лагранжа дозволяє під час розв'язання задач про рух системи визначати закон руху й реакції в'язей. Спочатку розглянемо деякі поняття, які необхідні для вивчення рівняння Лагранжа другого роду.

3.1. Загальні поняття аналітичної механіки. Узагальнені координати, швидкості, прискорення та узагальнені сили

Розв'язуючи задачі динаміки невільних систем, Ж. Лагранж стикнувся з математичними труднощами. Ці труднощі були пов'язані з тим, що кількість координат, які визначають положення механічної системи, залежить від кількості точок або тіл системи, а також від кількості й характеру в'язей. Ж. Лагранжу вдалося встановити, що в голономній системі кількість незалежних координат збігається з кількістю її степенів вільності. Саме за такі координати можна вибрати параметри, які мають змінні відстані, деякі незалежні декартові координати, кути повороту тощо. Ці незалежні координати Ж. Лагранж назвав *узагальненими* й позначив символом $q_i\left(i=1, 2, ..., n\right)$.

Узагальненими координатами механічної системи називається сукупність незалежних параметрів, що однозначно визначають положення (конфігурацію) матеріальної системи в просторі в будь-який момент часу. Механічну систему, конфігурація якої визначається n узагальненими координатами, можна розглядати як точку в n-вимірному просторі, положення якої визначається n-компонентним вектором-стовпцем $\vec{q} = [q_1, q_2, ..., q_n]'$ (штрих означає транспонування). З позиції аналітичної механіки можливе переміщення системи являє собою вектор $\delta\vec{q} = [\delta q_1, \delta q_2, ..., \delta q_n]'$, тобто вектор варіацій (ізохронних) узагальнених координат. Якщо механічна система підпорядкована голономними в'язями, то незалежним координатам q_i відповідають незалежні варіації δq_i. У цьому випадку точку, що визначається вектором $\vec{q}$, можна розглядати як вільну. Якщо ж механічна система не голономна, то незалежним координатам q_i відповідають залежні можливі переміщення δq_i. (Нагадуємо, що неголономні в'язі не накладають обмеження на конфігурацію системи, але накладають на можливі переміщення.) У цьому випадку точку, що визначається вектором $\vec{q}$, не можна розглядати як вільну і, досліджуючи її рух, окрім активних сил, доводиться враховувати реакції неголономних в'язей. Оскільки кількість степенів вільності механічної системи дорівнює кількості незалежних можливих переміщень, тобто незалежних варіацій узагальнених координат, то в разі голономних в'язей воно дорівнює кількості узагальнених координат, а в разі неголономних в'язей – менше ніж кількість незалежних координат (на кількість неголономних в'язей).

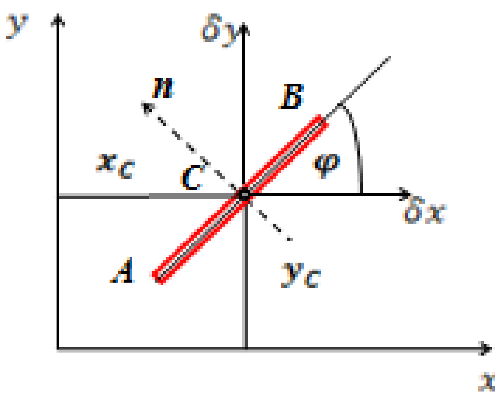

Рис. 3.1

Розглянемо, наприклад, санчата (рис. 3.1). Положення санчат визначається трьома незалежними координатами: $q_1 = x, q_2 = y, q_3 = \varphi$. Завдяки опуклій формі полозів санчата можуть обертатися навколо центру C з координатами (x_C, y_C). Отже, можуть бути приведені в будь-яке положення, яке можна визначати координатами. Проте ця система має тільки два степені вільності: поздовжнє ковзання й вертіння. Зменшення кількості степенів вільності зумовлене наявністю неголономної в'язі, який забороняє бокове ковзання, тобто переміщення точки C у напрямку нормалі n. Це можна записати через можливе переміщення:

$$\delta S_n = \delta y \cos\varphi - \delta x \sin\varphi = 0$$

або в узагальнених координатах

$$\delta q_2 \cos q_3 - \delta q_1 \sin q_3 = 0 .$$

Одержане диференціальне рівняння не задовольняє умови існування інтегруючого множника і, отже, не може бути проінтегроване. Це можна порівняти з рівнянням (1.2).

З цього не випливає, що санчата не можуть бути переведені в наскільки завгодно близьке паралельне положення. Таке переміщення цілком можливе, але тільки не безпосередньо, а за допомогою низки маневрів:

1) поворот навкруги C на деякий кут α;

2) поздовжнє ковзання вперед до виходу точки C на задану паралельну пряму;

3) поворот навкруги C на кут α;

4) поздовжнє ковзання «назад». При цьому точка C описує траєкторію з точкою повернення.

Наступними важливими поняттями аналітичної механіки є поняття узагальненої швидкості та узагальненого прискорення. **Узагальнена швидкість – це перша похідна від узагальненої координати за часом**

$$\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt}, \; i = 1, 2, ..., n ,$$

а **узагальнене прискорення – це друга похідна від узагальненої координати за часом**

$$\ddot{q}_i = \frac{d^2 q_i}{dt^2}, \; i = 1, 2, ..., n .$$

Встановимо фізичний зміст цих величин на прикладах. Якщо за узагальнену координату q_i прийняти деяку змінну відстань, то узагальненою швидкістю $\dot{q}_i$ буде лінійна швидкість, а узагальненим прискоренням $\ddot{q}_i$ – лінійне прискорення; якщо q_i кут повороту, то $\dot{q}_i$ і $\ddot{q}_i$ – відповідно кутова швидкість і кутове прискорення.

Уведемо поняття узагальненого імпульсу й узагальненої сили.

Узагальненими імпульсами називаються похідні від кінетичної енергії за відповідними швидкостями $\eta_i = \partial T / \partial q_i$ **.**

Узагальненими силами називаються множники при варіаціях відповідних координат у виразі можливої роботи сил, що діють на матеріальну систему. Щоб це зрозуміти, визначимо суму можливих робіт діючих сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$ на можливих переміщеннях $\delta r_i \left(i = 1, 2, ..., n \right)$

$$\delta A = \sum_{i=1}^{i=n} F_i \delta r_i .$$

Виразимо варіації $\delta \vec{r}_i$ радіуса-вектора $\vec{r}_i = \vec{r}_i \left(t, q_1, q_2, ..., q_k \right)$ через варіації узагальнених координат $\delta q_1, \delta q_2, ..., \delta q_k$. Візьмемо до уваги, що можливі переміщення надаються точкам системи у фіксований момент часу, тобто $\delta t = 0$:

$$\delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j , \; i = 1, 2, ..., n .$$

Підставимо одержане співвідношення у вираз робіт можливих переміщень

$$\delta A = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j$$

або

$$\delta A = \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j ,$$

де величину

$$Q_j = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} , \; \left(j = 1, 2, ..., k \right) \tag{3.1}$$

називають узагальненою силою, що відповідає узагальненій координаті q_j.

Отже, узагальнену силу можна обчислити як

$$Q_j = \delta A_j / \delta q_j . \tag{3.2}$$

Застосовуючи поняття узагальненої сили, приведемо вираз елементарної роботи до вигляду

$$\sum \delta A = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \ldots + Q_k \delta q_k . \qquad (3.3)$$

Особливо просто обчислюються узагальнені сили в тому випадку, коли фізичні сили, що діють на систему, потенціальні. Тоді

$$\sum \delta A = -\delta \Pi = -\left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial \Pi}{\partial q_2} \delta q_2 + \ldots + \frac{\partial \Pi}{\partial q_k} \delta q_k \right). \qquad (3.4)$$

Порівнюючи вирази (3.3), (3.4) для можливої роботи, бачимо, що

$$Q_j = -\left(\partial \Pi / \delta q_j \right). \qquad (3.5)$$

Зауважимо, що (3.4) не втрачає сили, якщо в'язі нестаціонарні, оскільки при обчисленні можливої роботи час не варіюється ($\delta t = 0$). Реакції ідеальних в'язей не входять до складу узагальнених сил, тому що для них $\sum \delta A = 0$.

Математичний маятник (рис. 3.2). Як уже відомо, під математичним маятником розуміють висячу точку, що підвішена на кінці невагомого стержня та описує коло у вертикальній площині навколо точки *O*.

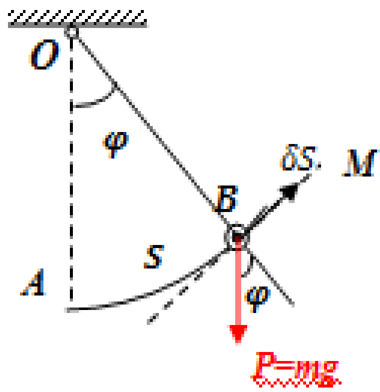

Рис. 3.2

Плоский математичний маятник, як у цьому випадку, має однин степінь вільності, тому за узагальнену координату можна вибрати або кут повороту φ, або довжину *S* дуги *AM*.

Приймемо за узагальнену координату q довжину дуги *S*. Тоді роль узагальненої швидкості $\dot{q}$ буде відігравати $\dot{S} = V$ (звичайна швидкість). Кінетична енергія $T = m\dot{S}^2/2$; узагальнений імпульс $\eta = \partial T / \partial \dot{S} = m\dot{S} = mV$, тобто в цьому випадку роль узагальненого імпульсу відіграє кількість руху. Для знаходження узагальненої сили обчислимо можливу роботу:

$$\partial A = P \delta S \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi \right) = -P \sin \varphi \delta S .$$

Таким чином, узагальнена сила, що відповідає координаті S, дорівнює $-P\sin\varphi$, тобто проекції сили P на додатний напрям дотичної.

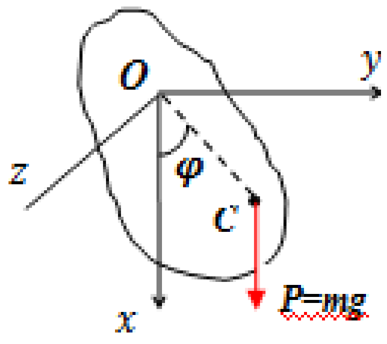

Рис. 3.3

Фізичний маятник (рис. 3.3). Тверде тіло може коливатися навколо осі z, яка перетинає площину креслення в точці O. За узагальнену координату q приймемо кут повороту φ. Тоді узагальнена швидкість – кутова швидкість $\dot{q}=\dot{\varphi}=\omega$. Якщо момент інерції цього тіла позначати як J_z, то кінетична енергія дорівнює $T=J_z\dot{\varphi}^2/2$, а узагальнений імпульс – $\eta=-\eta=\dfrac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}=J_z\dot{\varphi}=J_z\omega=K_z$.

У цьому випадку роль узагальненого імпульсу відіграє кінетичний момент. Для визначення узагальненої сили надамо куту φ приросщення $\delta\varphi$ і обчислимо відповідну роботу моменту сили ваги тіла: $\delta A=M_z\left(P\right)\delta\varphi$.

Звідси видно, що узагальнена сила, яка відповідає координаті φ, дорівнює $Q_\varphi=M_z\left(P\right)$, тобто являє собою момент сили P відносно осі z.

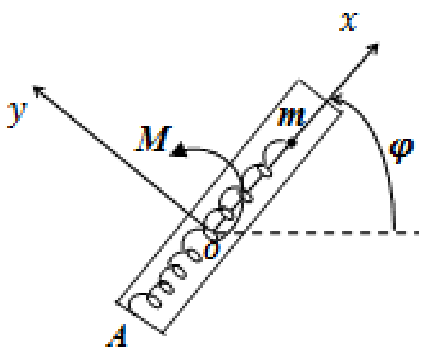

Рис. 3.4

Кулька масою m розміщена в трубці, що розташована на осі x, і обертається навколо осі z, яка перпендикулярна площині креслення (рис. 3.4). Кулька закріплена до торця трубки пружиною жорсткості C, довжина цієї пружини у недеформованому стані дорівнює AO. Трубка приводиться в обертання моментом M. Її момент інерції відносно осі z дорівнює J. Розглянемо для цієї системи узагальнені координати й зв'язані з ними величини. Для цього введемо рухому координатну систему xOy, яка обертається разом з трубкою навколо осі z.

Положення цієї механічної системи може бути визначено двома незалежними координатами: x, φ. Відповідними їм узагальненими швидкостями є $\dot{x}$ (відносна швидкість кульки) і $\dot{\varphi}$ (кутова швидкість трубки).

Узагальнені сили знайдемо таким чином. Надамо куту φ прирощення $d\varphi$ (x не варіюємо). Тоді сила пружності не виконує роботи, а роботу виконує тільки обертальний момент M, тобто $\delta A = M\delta\varphi$. Отже, узагальнена сила дорівнює діючому на трубку обертальному моменту: $Q_\varphi = M$. Що ж стосується узагальненої сили Q_x, яка відповідає координаті x, то її зручно знайти за допомогою потенціальної енергії пружини $П$, яка дорівнює $cx^2/2$.

$$Q_x = -\frac{\partial П}{\partial x} = -cx.$$

Визначимо тепер узагальнені імпульси тіл системи. Для цього необхідно знайти кінетичну енергію системи й виразити її через узагальнені швидкості:

$$T = T_{\text{тр}} + T_{\text{кул}};\ T_{\text{тр}} = \frac{J\omega^2}{2} = \frac{J}{2}\dot{\varphi}^2.$$

Швидкість кульки знайдемо методом проекцій на координатні осі:

$$V_x = \dot{x};\ V_x = \omega x = \dot{\varphi}x;\ V^2 = V_x^2 + V_y^2 = \dot{x}^2 + \dot{\varphi}^2 x^2;$$

$$T_{\text{кул}} = \frac{1}{2}mV^2 = \frac{m}{2}\left(x^2\dot{\varphi}^2 + \dot{x}^2\right).$$

Остаточно:

$$T = \frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2 + \frac{m}{2}\left(x^2\dot{\varphi}^2 + \dot{x}^2\right) = \frac{1}{2}\left[\left(J + mx^2\right)\dot{\varphi}^2 + m\dot{x}^2\right].$$

Тепер легко можна знайти імпульси:

$$\eta_x = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x};\ \eta_\varphi = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \left(J + mx^2\right)\dot{\varphi}.$$

Як бачимо, η_x являє собою кількість руху кульки в її відносному (відносно трубки) русі, η_φ – кінетичний момент усієї системи відносно осі z. Із цього прикладу випливає, що кінетична енергія системи може залежати не тільки від узагальнених швидкостей, але також і від координат (множник при $\dot{\varphi}^2$). На закінчення розглянемо більш детально структуру кінетичної енергії системи, яка може буде виражена через узагальнені координати. Декартові координати всіх точок системи будемо позначати через x_i. Тоді

$$T = \frac{1}{2}\sum m\dot{x}^2 . \tag{3.6}$$

Але будь-яка звичайна координата може бути виражена через узагальнені координати. Припустимо для простоти, що конфігурація системи визначається двома узагальненими координатами – q_1 і q_2. Тоді будь-яка звичайна координата $x = x(q_1, q_2, t)$,

$$\dot{x} = \frac{\partial x}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial x}{\partial q_1}\dot{q}_2 + \frac{\partial x}{\partial t}. \tag{3.7}$$

Підставляючи (3.7) у вираз кінетичної енергії T (3.6), отримаємо

$$T = \frac{1}{2}\sum m\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 = \frac{1}{2}\sum m\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2}\dot{q}_2\right)^2 +$$

$$+\sum m\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2}\dot{q}_2\right)\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{1}{2}\sum m\frac{\partial x^2}{\partial t}.$$

Перша сума є квадратичною формою відносно $\dot{q}_i$, друга – лінійною формою відносно $\dot{q}_i$ і третя сума взагалі не містить узагальнених швидкостей (або містить їх у нульовому степені).

Таким чином, $T = T_2 + T_1 + T_0$, де T_2, T_1, T_0 являють собою однорідні функції відповідно 2, 1 і 0 степенів відносно узагальнених швидкостей.

Вираз (3.7) суттєво спрощується у випадку стаціонарних в’язей, тут вираження x_i через q_i не містить явно часу, тому $dx_i/dt = 0$. Тоді T_1, T_0, які містять множники dx/dt, перетворюються в 0. Для системи зі стаціонарними в’язями кінетична енергія виражається квадратичною формою відносно швидкостей.

На підставі теореми Ейлера про однорідні функції випливає, що якщо $F\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ являє собою однорідну функцію степеня n, то

$$\sum x_i \frac{\partial F}{\partial x_i} = nF .$$

Застосуємо цю теорему до кінетичної енергії T_2 і отримаємо

$$2T_2 = \sum \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i .$$

Якщо в’язі стаціонарні, то $T_2 = T$; окрім того, за визначенням

$$\eta = \partial T / \partial \dot{q} .$$

Таким чином, у випадку стаціонарних в’язей

$$2T = \sum \eta_i \dot{q}_i . \tag{3.8}$$

Вираз (3.8) має велике значення в аналітичній механіці. Тому потрібно твердо пам’ятати, що лише при стаціонарних в’язях він дорівнює подвоєній кінетичній енергії.

3.2. Загальне рівняння статики в узагальнених координатах

Згідно із загальним рівнянням статики (принципом можливих переміщень) для невільної системи, що підпорядковується ідеальним стаціонарним в’язям, необхідно й достатньо, щоб сума елементарних робіт активних сил на можливих переміщеннях дорівнювала нулю: $\sum \delta A^{\text{акт}} = 0$. В узагальнених координатах ця умова, згідно з рівнянням (3.2), дає такий вираз:

$$Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \ldots + Q_k \delta q_k = 0 . \tag{3.9}$$

Рівняння (3.9) називають **загальним рівнянням статики в узагальнених координатах**.

Оскільки величини $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_k$ між собою незалежні, то рівняння (3.9) справедливе тоді, коли кожний з коефіцієнтів при δq_1, $\delta q_2, \ldots, \delta q_k$ має дорівнювати нулю, тобто $Q_1 = 0$, $Q_2 = 0$, $Q_k = 0$. Дійсно, припустимо, що

$$\delta q_1 \neq 0;\ \delta q_2 = \delta q_3 = \ldots = \delta q_k .$$

Тоді (3.9) матиме вигляд

$$Q_1 \delta q_1 = 0 .$$

Звідси

$$Q_1 = 0 .$$

Аналогічно можна довести, що всі узагальнені сили дорівнюють нулю.

Отже, **у стані рівноваги невільної системи, що підпорядковується ідеальним стаціонарним голономним в'язям, усі узагальнені сили мають дорівнювати нулю**.

3.3. Основні рівняння аналітичної механіки

Рівняння Лагранжа II роду. Це рівняння застосовується тільки для розгляду голономних систем. Для виведення цього рівняння звернемося до загального рівняння динаміки:

$$\sum \delta A^{\text{акт}} + \sum \delta A^{in} = 0$$

і перетворимо його до узагальнених координат.

Нехай система має k степенів вільності і її положення визначається узагальненими координатами. Тоді елементарна робота активних сил виражається в узагальнених координатах згідно з виразом (3.2):

$$\sum \delta A^{\text{акт}} = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \ldots + Q_k \delta q_k . \tag{3.10}$$

Очевидно, що аналогічно можна виразити роботу сил інерції $Q_1^{in}, Q_2^{in}, \ldots, Q_k^{in}$ в узагальнених координатах:

$$\sum \delta A^{in} = Q_1^{in}\delta q_1 + Q_2^{in}\delta q_2 + \ldots + Q_k^{in}\delta q_k \,. \qquad (3.11)$$

Підставивши величини (3.10) і (3.11) в загальне рівняння динаміки, одержимо

$$\left(Q_1 + Q_1^{in}\right)\delta q_1 + \left(Q_2 + Q_2^{in}\right)\delta q_2 + \ldots + \left(Q_k + Q_k^{in}\right)\delta q_k = 0 \,.$$

Оскільки $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_k$ між собою незалежні, то отримане рівняння виконується тоді й тільки тоді, коли кожний з коефіцієнтів при $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_k$ дорівнює нулю, тобто

$$Q_1 + Q_1^{in} = 0\,;\;\; Q_2 + Q_2^{in} = 0\,;\;\; Q_k + Q_k^{in} = 0 \,.$$

Тоді для точок системи випливають узагальнені рівняння руху

$$Q_j + Q_j^{in} = 0 \,. \qquad (3.12)$$

Узагальнені сили інерції згідно з виразом (3.1) будуть:

$$Q_j^{in} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j},\;\; \left(j = 1, 2, \ldots, k\right).$$

Перетворимо вираз узагальненої сили інерції:

$$Q_j^{in} = -\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{a}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = -\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\vec{V}_i}{dt}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$$

або

$$-Q_j^{in} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{V}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right) - \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{V}_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right). \qquad (3.13)$$

Щоб перетворити вираз (3.13), розглянемо значення вектора швидкості в узагальнених координатах, якщо радіуси-вектори $\vec{r}_i$

є функціями узагальнених координат $\vec{r}_i = \vec{r}_i\left(t, q_1, q_2, \ldots, q_k\right)$, а узагальнені координати визначають положення точок матеріальної системи.

$$\vec{V}_i = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \,. \tag{3.14}$$

З виразу (3.14) випливає **тотожність Лагранжа**:

$$\frac{\partial \vec{V}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \,.$$

Застосовуючи тотожність Лагранжа, перетворимо послідовно вираз (3.13). Спочатку розглянемо вираз у дужках і запишемо його так:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{V}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{V}_i \frac{\partial \vec{V}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\vec{V}_i \vec{V}_i}{2}\right) = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}. \tag{3.15}$$

Потім розглянемо останню частину виразу (3.13):

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{V}_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right) = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{V}_i \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{V}_i \frac{\partial \vec{V}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{m_i V_i}{2}\right)^2 = \frac{\partial T}{\partial q_j}. \tag{3.16}$$

Підставимо отримані вирази (3.15), (3.16) у вираз (3.13)

$$-Q_j^{in} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j},$$

а потім в узагальнені рівняння руху (3.12) та дістанемо

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \left(j = 1, 2, \ldots, k\right).$$

Виведені рівняння є диференціальними рівняннями руху голономних механічних систем, які складені в незалежних координатах. Їх називають **рівняннями Лагранжа другого роду**.

Якщо сили, що діють на систему, потенціальні, то узагальнена сила в цьому випадку має вигляд

$$Q_j = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}.$$

Підставивши цей вираз у рівняння Лагранжа другого роду, отримаємо

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}, \ \left(j = 1, 2, \ldots, k\right)$$

або

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial\left(T-\Pi\right)}{\partial \dot{q}_j}\right] - \frac{\partial\left(T-\Pi\right)}{\partial q_j} = 0,$$

де $T - \Pi = L$ – функція Лагранжа, або кінетичний потенціал системи.

Тоді у випадку потенціальних сил рівняння Лагранжа набуває вигляду

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \ \left(j = 1, 2, \ldots, k\right).$$

Знаючи функцію Лагранжа, можна скласти диференціальні рівняння руху системи. Якщо частина сил – потенціальні, а частина – непотенціальні, то

$$Q_j = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} + Q_j^{\text{нп}},$$

а рівняння Лагранжа буде мати вигляд

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} = Q_j^{\text{нп}}.$$

З множини непотенціальних сил можна відокремити непотенціальні сили опору руху, які пропорційні швидкості руху $\vec{F}_{\text{оп}} = -b_i V_i$, де b_i – коефіцієнт пропорційності. Для таких сил можлива робота буде $\delta A = \sum_i \left(-b_i \vec{V}_i\right) \delta \vec{r}_i$. Згадуючи, що $\delta \vec{r}_i = \sum \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j$, далі можемо продовжити перетворення:

$$A = \sum_i \left(-b_i \vec{V}_i\right) \sum_j \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_j \left(\sum_i -b_i \vec{V}_i \frac{\partial \vec{V}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j = \sum_j \left[\sum_i \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{b_i V_i^2}{2} \right) \right] =$$

$$= \sum_j \left(\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j = \sum_j Q_j \delta q_j \,,$$

де R – дисипативна функція Релея (дисипація – втрата енергії):

$$R = \sum_i \frac{b_i V_i^2}{2}, \ Q_j = -\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j}.$$

Узагальнену непотенціальну силу виразимо сумою

$$Q_j^{\text{нп}} = P_j + \left(-\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j} \right).$$

Тоді рівняння Лагранжа другого роду можна записати ще й таким виразом:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j} = P_j, \ \left(j = 1, 2, \ldots, k \right).$$

3.4. Основні рівняння. Методика та приклади розв'язання задач за допомогою рівняння Лагранжа другого роду

Розглянемо розв'язання задач за допомогою рівняння Лагранжа другого роду у вигляді

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \ \left(j = 1, 2, \ldots, k\right).$$

Вкажемо важливі особливості цього рівняння: кількість рівнянь дорівнює кількості степенів вільності; форма запису цих рівнянь не залежить від конкретного вибору системи узагальнених координат; рівняння не містять реакцій ідеальних в'язей.

Характерною особливістю методики розв'язання задач динаміки із застосовуванням рівняння Лагранжа другого роду є загальна послідовність окремих етапів розв'язання та дослідження кожної задачі.

Таким чином, будемо дотримуватися такої послідовності дії:

1. Визначити кількість степенів вільності системи матеріальних тіл, що рухаються.
2. Вибрати узагальнені координати, що відповідають числу степенів вільності.
3. Визначати узагальнені сили за допомогою формул (3.2), (3.5).
4. Обчислити кінетичну енергію системи.
5. Обчислити похідні: $\partial T / \partial \dot{q}_j$ і $\partial T / \partial q_j$.
6. Скласти рівняння руху матеріальної системи згідно з рівнянням Лагранжа другого роду. Інтегрувати їх, враховуючи початкові умови руху.
7. Проаналізувати знайдений розв'язок відповідно до конкретних умов.

Розглянемо задачі двох типів.

1. Задачі, де система має один степінь вільності.
2. Задачі, де система має два степені вільності.

Розглянемо задачі з одним степенем вільності.

Приклад 3.1. Однорідний стержень *AB* (рис. 3.5) довжиною 2ℓ і масою $m_{AB} = m$ обертається навколо осі *O* нерухомої шестерні *1* під дією пари сил з моментом *M*. На стержні *AB* розташовані дві шестерні *2* і *2′* радіусом *r* і масою $m_2 = 0,5m$ кожна, які котяться по нерухомій поверхні шестерні *1*, що надає рух колесу *3* масою $m_3 = 2m$. Через колесо перекинуто невагому нитку, до кінця якої прикріплено вантаж *P*, який здійснює силу опору $P = P_4$ масою $m_4 = 0,25m$. Визначити кутове прискорення ε стержня *AB*, коли шестерні *2* і *2′* є суцільні однорідні диски, маса колеса *3* рівномірно розподілена по його поверхні.

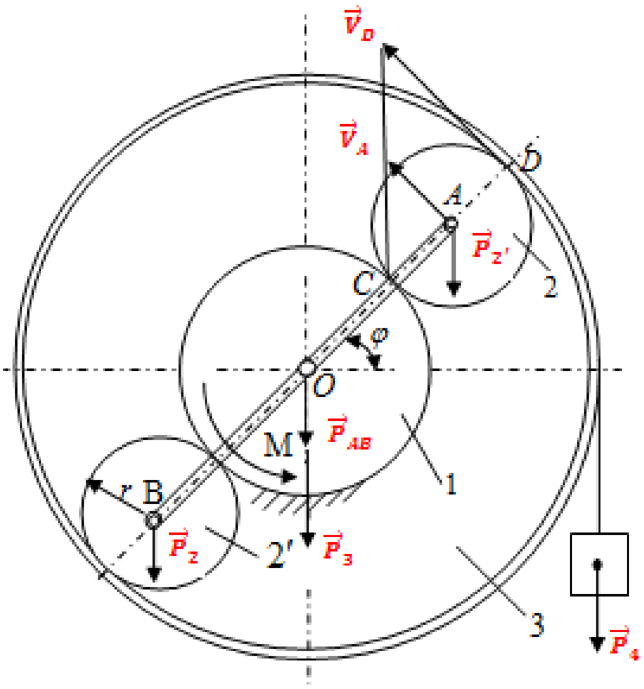

Рис. 3.5

Розв'язання. Ця механічна система має один степінь вільності, оскільки накладання однієї нової в'язі повністю зупиняє рух певної системи. В'язі, які вже накладені на матеріальну систему, є голономними стаціонарними. Положення цього механізму будемо визначати одним параметром. Оскільки треба знайти кутове прискорення стержня *AB*, то за узагальнену координату зручніше вибрати теж кутову характеристику – кут повороту φ стержня *AB*, тобто $q = \varphi$. Тоді узагальненою швидкістю буде кутова швидкість стержня, а узагальненим прискоренням – кутове прискорення, тобто $\dot{q} = \dot{\varphi} = \omega;\ \ddot{q} = \varepsilon$.

Таким чином, маємо одне рівняння Лагранжа: $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial \varphi} = Q$.

Знайдемо узагальнену силу, яка відповідає вибраній узагальненій координаті, визначивши елементарну роботу активних сил.

До точок механічної системи прикладено такі сили: сили ваги стержня $\vec{P}_{AB}$, шестерень $\vec{P}_2$ і $\vec{P}_{2'}$, колеса $\vec{P}_3$, вантажу $\vec{P}_4$ та пара сил з моментом *M*. Надамо стержню *AB* можливе переміщення δφ та обчислимо суму робіт діючих сил. Зауважимо, що сума робіт сил ваги шестерень дорівнює нулю, оскільки значення величин цих робіт за модулем однакові, але мають різні знаки. Тоді сума робіт, діючих на певну систему сил, становитиме

$$\sum \delta A = M\delta\varphi - P_4\left(\ell + r\right)\delta\varphi_3,$$

де $\delta\varphi_3$ – кут повороту колеса *3*.

Для встановлення зв'язку між $\delta\varphi$ та $\delta\varphi_3$ скористаємося кінематичними співвідношеннями. Спочатку визначимо зв'язок між швидкостями. Миттєвий центр швидкостей шестерні *2* розташований у точці *C* – зачеплення шестерні з нерухомою поверхнею шестерні *1*. Для визначення кутової швидкості ω_3 колеса *3* знайдемо швидкість у точці *D* зачеплення шестерні *2* з колесом *3*:

$$V_D = 2V_A = 2\omega\ell,$$

отже,

$$\omega_3 = \frac{V_D}{OD} = \frac{2\omega\ell}{\ell + r} = \frac{2\ell}{\ell + r}\omega. \qquad (3.17)$$

Далі, враховуючи, що $\omega = d\varphi/dt$, $\omega_3 = d\varphi_3/dt$, з виразу (3.17) отримаємо $d\varphi_3 = \dfrac{2\ell}{\ell + r}d\varphi$.

Оскільки в'язі стаціонарні, дійсні переміщення є одними з можливих. Отже, можна записати $\delta\varphi_3 = \dfrac{2\ell}{\ell + r}\delta\varphi$.

Тоді сума робіт, які діють на певну систему сил, буде

$$\sum \delta A = M\delta\varphi - P_4\left(\ell + r\right)\frac{2\ell}{\ell + r}\delta\varphi = \left(M - 2P_4\ell\right)\delta\varphi;$$

таким чином

$$Q = \frac{\sum \delta A}{\delta\varphi} = M - 2P_4\ell. \qquad (3.18)$$

Визначимо кінетичну енергію *T* системи, яка складається з кінетичної енергії стержня *AB*, енергії $2T_2$ двох шестерней, енергії T_3 колеса *3* і енергії вантажу *4*: $T = T_{AB} + 2T_2 + T_3 + T_4$.

Стержень *AB* та колесо *3* здійснюють обертальний рух навколо нерухомої осі *O*, тому

$$T_{AB} = \frac{J_{AB}\omega^2}{2},\ T_3 = \frac{J_3\omega_3^2}{2},$$

де J_{AB} і J_3 – моменти інерції відповідно стержня *AB* і колеса *3* відносно осі *O*.

Потім визначимо моменти інерції: осьовий момент інерції колеса *3* як кільця, коли його маса зосереджена по його зовнішньому радіусу:

$$J_3 = m_3\left(OD\right)^2 = 2m\left(\ell + r\right)^2,$$

і стержня, коли вісь обертання розташована у середині стержня:

$$J_{AB} = \frac{m_{AB}\left(AB\right)^2}{12} = \frac{m4\ell^2}{12} = \frac{m\ell^2}{3}.$$

Тоді, після підстановки отриманих виразів моментів інерції, вирази для кінетичної енергії стержня й колеса будуть мати вигляд

$$T_{AB} = \frac{m\ell^2\omega^2}{6},\ T_3 = m\left(\ell + r\right)^2\omega_3^2.$$

Враховуючи вираз (3.17), кінетичну енергію T_3 виразимо через ω

$$T_3 = m\left(\ell + r\right)^2\left(\frac{2\ell}{\ell + r}\omega\right)^2 = m\left(\ell + r\right)^2\frac{4\ell^2\omega^2}{\left(\ell + r\right)^2} = 4m\ell^2\omega^2.$$

Вантаж *4* здійснює поступальний рух, тому $T_4 = \dfrac{m_4V_4^2}{2}$.

Шестерні здійснюють плоскопаралельний рух, їх кінетична енергія визначається з виразу

$$2T_2 = 2\left(\frac{m_2V_A^2}{2} + \frac{J_2\omega_2^2}{2}\right),$$

де V_A – швидкість центру мас шестерні;

J_2 – момент інерції шестерні відносно центральної горизонтальної поздовжньої осі *A*, знаходимо як для суцільного однорідного диска $J_2 = m_2 r^2 / 2 = mr^2 / 4$.

Кутові швидкості ω_2 шестерні *2*, а також лінійні швидкості точки *A* та вантажу *4* виразимо через кутову швидкість ω з урахуванням того, що точка *C* є миттєвим центром швидкостей шестерні *2* – зачеплення шестерні з нерухомою поверхнею шестерні *1*.

$$\omega_2 = \frac{V_A}{CA} = \frac{\omega OA}{r} = \frac{\omega \ell}{r};\ V_A = V_D = 2V_A = 2\omega\ell .$$

З урахуванням одержаних формул отримаємо кінетичну енергію і T_4:

$$2T_2 = 2\left(\frac{m\omega^2\ell^2}{4} + \frac{m\omega^2\ell^2}{8}\right) = \frac{3}{4} m\omega^2\ell^2;\ T_4 = \frac{m(2\omega\ell)^2}{8} = \frac{m\omega^2\ell^2}{2}.$$

Таким чином, для кінетичної енергії системи маємо такий вираз:

$$T = \frac{m\omega^2\ell^2}{6} + \frac{3}{4} m\omega^2\ell^2 + 4m\omega^2\ell^2 + \frac{m\omega^2\ell^2}{2} = \frac{59}{12} m\omega^2\ell^2 = \frac{59}{12} m\dot{\varphi}^2\ell^2 .$$

Звідси знайдемо:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{59}{6}\ell^2 m\dot{\varphi};\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = \frac{59}{6}\ell^2 m\ddot{\varphi} = \frac{59}{6}\ell^2 m\varepsilon , \qquad (3.19)$$

де ε – кутове прискорення стержня *AB*; $\partial T / \partial\varphi = 0$, оскільки *T* не залежить від φ.

Підставимо знайдені значення узагальненої сили (3.18) і похідних (3.19) у рівняння Лагранжа, отримаємо: $\frac{59}{6}\ell^2 m\varepsilon = M - 2P\ell$. Звідси

$$\varepsilon = \frac{6(M - 2P\ell)}{59\ell^2 m}.$$

Приклад 3.2. Маса візка *1* рівна m_1, а маса розташованого на ньому котка *2* – m_2. Визначити, з яким прискоренням буде рухатися візок вздовж горизонтальної площини під дією прикладеної до нього сили $\vec{F}$ (рис. 3.6), якщо коток при цьому котиться по візку без ковзання. Масою коліс візка нехтуємо.

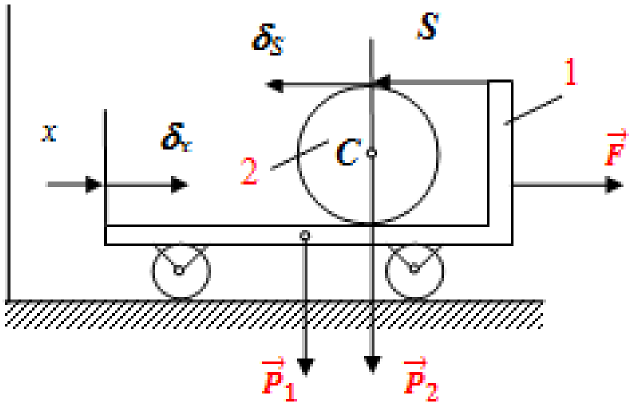

Рис. 3.6

Розв'язання. Ця механічна система має два степені вільності та є голономною консервативною системою з ідеальними в'язями. Положення досліджуваної системи визначимо двома параметрами: незалежним переміщенням котка відносно візка й переміщенням самого візка. Таким чином як узагальнені координати виберемо координату x візка й координату s центру мас C котка відносно візка. Тоді рівняння Лагранжа для системи мають вигляд

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial T}{\partial x}=Q_1;\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{s}}\right)-\frac{\partial T}{\partial s}=Q_2.$$

Визначимо узагальнені відповідні сили Q_1 і Q_2. Покажемо діючі активні сили: сили ваги $\vec{P}_1$ і $\vec{P}_2$ та сила $\vec{F}$, під дією якої рухається візок (див. рис. 3.6). Для визначення узагальнених сил надамо системі можливе переміщення, при якому координата x отримує приріст $\delta x > 0$. На цьому переміщенні здійснює роботу тільки сила $\vec{F}$, тобто $\delta A_1 = F\delta x$. На переміщенні, за яким s отримує приріст δs, робота усіх сил буде дорівнювати нулю, тобто $\delta A_2 = 0$. Цей результат явний, оскільки рух системи здійснюється тільки в горизонтальній площині, а проекція сил ваги на горизонтальну вісь дорівнює нулю

$\left(P_{1x}=0, P_{2x}=0\right)$, тоді й робота цих буде дорівнювати нулю. Отже, $Q_1=F$, $Q_2=0$. Визначимо кінетичну енергію T системи, яка складається з кінетичної енергії візка T_1 та котка T_2. Кінетичну енергію візка визначимо як для поступального руху тіла $T_1=m_1\dot{x}^2/2$. Коток здійснює плоскопаралельний рух, його кінетична енергія

$$T_2=\frac{m_2V_C^2}{2}+\frac{J_C\omega^2}{2},$$

де V_C – абсолютна швидкість центру C котка й чисельно $V_C=\dot{x}-\dot{s}$. Оскільки для циліндра $J_C=mr^2/2$, а при котінні без ковзання кутову швидкість котка ω можна записати як $\omega=\dot{s}/r$, де $\dot{s}$ – відносна швидкість центру C котка відносно візка, то в результаті отримаємо кінетичну енергію механічної системи

$$T=T_1+T_2=\frac{m_1\dot{x}^2}{2}+\frac{m_2\left(\dot{x}-\dot{s}\right)}{2}+\frac{m_2\dot{s}^2}{4}.$$

Знайдемо частинні похідні від кінетичної енергії:

$$\frac{\partial T}{\partial x}=\frac{\partial T}{\partial s}=0;\ \ \frac{\partial T}{\partial \dot{x}}=m_1\dot{x}+m_2\left(\dot{x}-\dot{s}\right);\ \ \frac{\partial T}{\partial \dot{s}}=m_2\left(\dot{s}-\dot{x}\right)+m_2\frac{\dot{s}}{2}.$$

Підставляючи отримані частинні похідні й значення узагальнених сил Q_1 і Q_2 в рівняння Лагранжа другого роду, знайдемо такі диференціальні рівняння руху системи:

$$\left(m_1+m_2\right)\ddot{x}-m_2\ddot{s}=F;\ 3\ddot{s}-2\ddot{x}=0.$$

З останнього рівняння $\ddot{s}=2\ddot{x}/3$, і тоді перше рівняння дає остаточно для прискорення a_1 візка значення $a_1=\ddot{x}=3F/\left(3m_1+m_2\right)$. Якщо б коток був нерухомо закріплений на візку, то прискорення візка було б рівне $F/\left(m_1+m_2\right)$.

Запитання та завдання для самоперевірки

1. Що таке узагальнені координати?
2. Що таке узагальнена швидкість?
3. Що таке узагальнене прискорення?
4. Що таке узагальнений імпульс?
5. Що таке узагальнена сила?
6. Як записуються умови рівноваги в узагальнених координатах?
7. Як записуються рівняння Лагранжа другого роду?
8. Як записуються рівняння Лагранжа другого роду з урахуванням потенціальних, непотенціальних сил та функції розсіювання енергії системи?

РОЗДІЛ 4

Приклади розв’язання транспортних задач на підставі застосування елементів аналітичної механіки

Студенти, які навчаються за технічними спеціальностями у вищих навчальних закладах, повинні мати чітке уявлення про можливості використання знань, які здобуті в ході вивчення конкретної дисципліни, у розв’язанні інженерних задач. Цей навчальний посібник призначений для студентів транспортних вузів. Тож розглянемо деякі приклади розрахункових схем – від простих до більш складних, які допоможуть у вирішенні питань безпеки, а також збільшення терміну служби рухомого складу. Слід зауважити, що надалі буде розглянуто тільки розрахункові схеми, без додаткових розрахунків, пов’язаних з аналізом безпеки руху.

На початку розглянуто елементарні розрахункові схеми, які найбільш часто використовуються у вивченні курсу аналітичної механіки в різних навчальних закладах.

4.1. Оцінка динамічної якості рейкових екіпажів за допомогою найпростішої розрахункової схеми

Розглянемо найпростішу розрахункову схему вимушених коливань вагона, за якою без великих похибок можна скласти уявлення про коливання рухомого складу. Зобразимо таку схему у вигляді вагона масою m (рис. 4.1), яка підвішена до колеса, коли колесо котиться по жорсткій колії. При цьому колія має нерівності до синусоїдальної форми. У цьому випадку сила інерції $m\ddot{z}$ зрівноважується силами пружності $c\left(z-z_k\right)$, де c – коефіцієнт жорсткості пружних елементів; z – вертикальне переміщення об’єкта, який амортизується; z_k – вертикальне переміщення колеса.

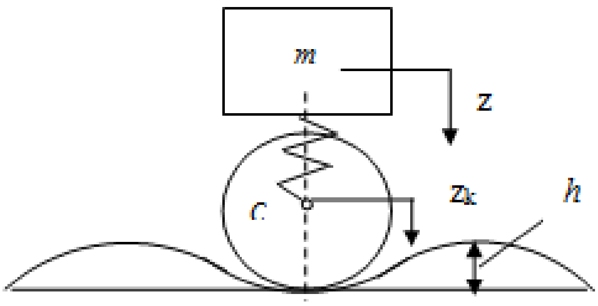

Рис. 4.1

Тоді, застосовуючи принцип Д’Аламбера, одержимо

$$m\ddot{z}+c\left(z-z_k\right)=0.$$

Вертикальне переміщення z_k запишемо у вигляді

$$z_k=h\cos\omega t,$$

де h – найбільше вертикальне значення нерівності;

ω – частота збуджувальної сили.

Підставивши в рівняння $z_k=h\cos\omega t$ та поділивши всі члени рівняння на m, одержимо

$$\ddot{z}+\nu^2 z=\nu^2 h\cos\omega t. \tag{4.1}$$

де ν^2 – колова частота вільних коливань системи, $\nu^2=c/m$;

ω – частота вимушених коливань.

Загальний розв’язок неоднорідного диференціального рівняння (4.1) знайдемо як суму загального z_1 та частинного z_2.

Нехай $z_2=A_2\cos\omega t$. Підставивши значення z_2 у рівняння (4.1), одержимо $A_2=\dfrac{\nu^2 h}{\nu^2-\omega^2}$, тобто $z_2=\dfrac{\nu^2 h}{\nu^2-\omega^2}\cos\omega t$. Розв’язок однорідного рівняння має вигляд $z_1=A_1\cos\nu t$. За допомогою початкових умов $\left(t=0, z=0\right)$ знайдемо $A_1=\dfrac{\nu^2 h}{\nu^2-\omega^2}$. Тоді загальний розв’язок неоднорідного диференціального рівняння (4.1) має вигляд

$$z=\frac{\nu^2 h}{\nu^2-\omega^2}\left(\cos\omega t-\sin\nu t\right).$$

Величину $\frac{1}{\nu^2-\omega^2}=\chi$ називають коефіцієнтом зростання коливань. Враховуючи χ, запишемо загальний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння як $z=\chi\nu^2 h\left(\cos\omega t+\cos\nu t\right)$.

Досліджуючи коливання системи за допомогою одержаного загального розв'язку неоднорідного диференціального рівняння, можна розглядати різні коливання та вивчати таке явище, як резонанс, а також отримувати графіки різних видів коливань системи.

Так, зростання коливань при битті, а особливо при резонансі, може призвести до дуже небезпечних наслідків. У разі коливань вагона при висхідному русі ресор можливе повне розвантаження колісної пари від дії надресорної будови й схід коліс з рейок під впливом бічних сил. При низхідному русі ресор витки пружини ресорного підвішування можуть зімкнутися, шлях і вагон при цьому будуть відчувати досить великі удари, оскільки загальна ударна маса буде дорівнює сумі маси колеса й маси кузова, що припадає на колесо.

Тому при конструюванні вагонів вживають заходів для зниження амплітуд коливань шляхом установки гасників коливань. Для цього прагнуть всю енергію, яка надходить у пружні елементи коливальні системи, витратити на тертя в гаснику з тим, щоб вона перетворювалася в теплову енергію й розсіювалися в навколишній простір. Зображаємо таку схему (рис. 4.2), де є гасник коливань в'язкого опору, тобто демпфер. Також за допомогою принципу Д'Аламбера та враховуючи сили в'язкого опору першого ступеня швидкості відносно переміщення, складаємо диференціальне рівняння у вигляді

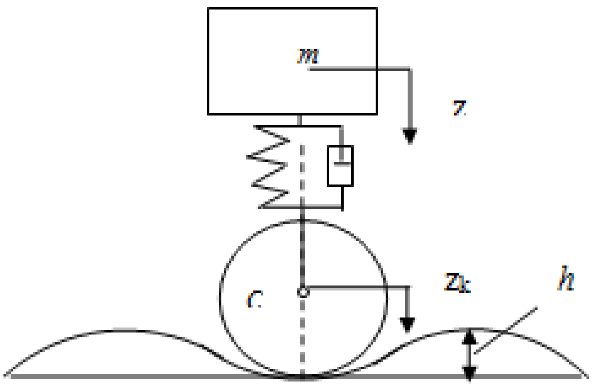

Рис. 4.2

$$m\ddot{z}+c\left(z-z_k\right)+\beta\left(\dot{z}-\dot{z}_k\right)=0,$$

де β – коефіцієнт в'язкого опору.

На підставі досліджень цього рівняння можна визначати $\beta_{кр}$ та виконати розрахунок параметрів різних видів гасників коливань, що дозволить зменшити ризик несприятливих явищ.

4.2. Аналіз безпеки від сходу колісної пари з рейок

Розглянемо застосування принципу можливих переміщень для аналізу безпеки від сходу колісної пари з рейок.

Розглянемо положення граничної рівноваги колісної пари, що граничить із зоною безпеки від сходу. Рівняння рівноваги колісної пари отримаємо за допомогою принципу можливих переміщень (рис. 4.3):

$$\delta A_k^{\text{акт}} = 0,$$

де $\delta A_k^{\text{акт}}$ – елементарна робота всіх активних сил, що діють на систему, за будь-яких можливих переміщень.

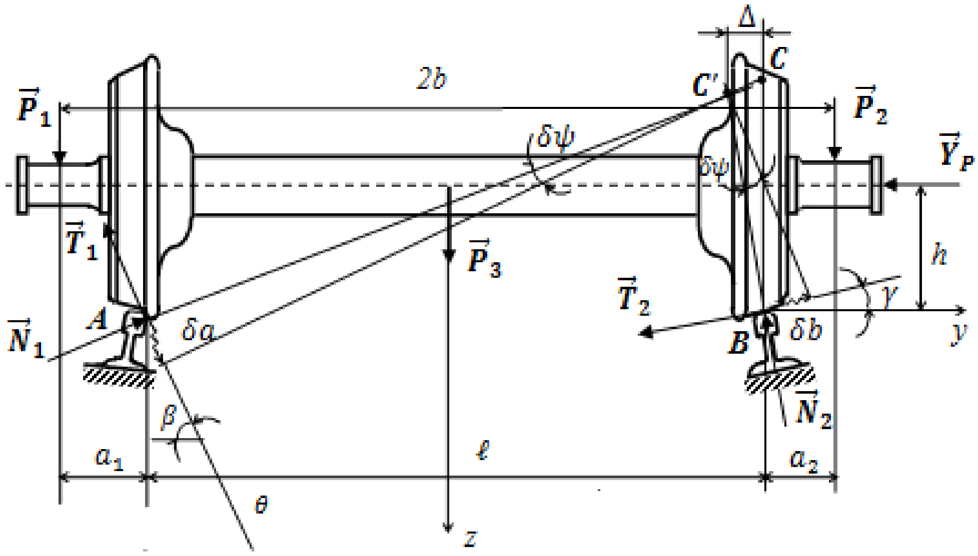

Рис. 4.3

В'язі будемо вважати геометричними, утримувальними й стаціонарними, що забезпечує можливість використання для її вирішення принципу можливих переміщень. За можливе переміщення приймемо поворот колісної пари $\delta\psi$ відносно деякого центру C', що збігається з миттєвим центром швидкостей можливого переміщення опорних точок A, B – δa, δb (див. рис. 4.3).

Оскільки можливе переміщення є кутом повороту, то елементарну роботу активних сил, прикладених до колісної пари $\delta A_k^{\text{акт}}$, доцільно обчислювати у вигляді

$$\sum \delta A_k^{\text{акт}} = \sum m_{C'}\left(\vec{F}_k^{\text{акт}}\right)\delta\psi ,$$

де $m_{C'}\left(\vec{F}_k^{\text{акт}}\right)$ – момент активних сил $\vec{F}_k^{\text{акт}}$ відносно центру повороту C', $m_{C'}\left(\vec{F}_k^{\text{акт}}\right) = 0$.

Дія активних сил на колісну пару наведена на рис. 4.3, де $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$ – динамічні вертикальні навантаження, що діють на шийки коліс; $\vec{P}_3$ – вага частини візка, яка віднесена до однієї колісної пари; $\vec{Y}_P$ – горизонтальна поперечна сила, яка діє з боку рами візка. Оскільки в'язі неідеальні, треба враховувати також сили реакції $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$, за допомогою яких можна визначити сили тертя $\vec{T}_1$, $\vec{T}_2$ як $T_1 = \mu N_1$, $T_2 = \mu N_2$, де μ – коефіцієнт сили тертя.

Таким чином, із умов рівноваги колісної пари $m_{C'}\left(\vec{F}_k^{\text{акт}}\right) = 0$ можна обчислити суму моментів активних сил відносно точки C':

$$\sum m_{C'}\left(\vec{F}_k^{\text{акт}}\right) = m_{C'}\left(\vec{P}_1\right) + m_{C'}\left(\vec{P}_2\right) + m_{C'}\left(\vec{P}_3\right) + m_{C'}\left(\vec{Y}_p\right) + m_{C'}\left(\vec{T}_1\right) + m_{C'}\left(\vec{T}_2\right).$$

Умова безпеки щодо сповзання гребеня колеса вниз по головці рейки можуть випливати з такого виразу:

$$m_{C'}\left(\vec{P}_1\right) + m_{C'}\left(\vec{P}_2\right) + m_{C'}\left(\vec{P}_3\right) \geq m_{C'}\left(\vec{Y}_p\right) + m_{C'}\left(\vec{T}_1\right) + m_{C'}\left(\vec{T}_2\right).$$

При цьому можна обчислити моменти кожної сили (розміри колісної пари для визначення пліч вказані на рис. 4.3).

$$m_{C'}\left(\vec{P}_1\right) = P_1\left(2b - a_2 - \Delta\right) - P_2\left(a_2 + \Delta\right) + P_3\left(b - a_2 - \Delta\right);$$

$$m_{C'}\left(\vec{Y}_p\right) + \sum m_{C'}\left(\vec{T}_i\right) = Y_p\left[\left(\ell - \Delta\right)\operatorname{ctg}\beta - h\right] - N_1\mu\frac{\ell - \Delta}{\sin\beta} - N_2\mu\left(\ell - \Delta\right)\operatorname{ctg}\beta .$$

Таким чином, одержані рівняння моментів дають можливість на підставі умов $\sum m_{C'}\left(\vec{P}_i\right) \geq m_{C'}\left(\vec{Y}_p\right) + \sum m_{C'}\left(\vec{T}_i\right)$ аналізувати безпеку від сходу колісної пари з рейок.

4.3. Оцінка динамічної якості рейкових екіпажів за допомогою складної розрахункової схеми

Нарешті розглянемо найбільш складну розрахункову схему рейкового екіпажа, яка дає можливість зробити оцінку динамічної якості. Такі схеми можуть бути більш повними або менше залежно від допусків та ідеалізації.

Залежно від кількості допусків та ідеалізації вибирається кількість степенів вільності, що пов'язані з вибором кількості загальних координат. Розрахункові схеми рейкових екіпажів являють собою складні багатомасові системи, які складаються з твердих тіл, з'єднаних пружно-дисипативними й жорсткими елементами.

Для дослідження динамічних якостей необхідно скласти та розв'язати диференціальні рівняння вищого порядку залежно від обраних загальних координат.

Розглянемо розрахункову схему, яка складається з 11 твердих тіл (рис. 4.4) (кузов, дві надресорні балки, чотири боковини й чотири колісні пари). Кожне тверде тіло, як нам відомо, може мати шість степенів вільності. Тоді певна розрахункова схема, яка складається з 11 твердих тіл має 66 ступенів вільності. Для спрощення розв'язання задачі необхідно зменшити кількість степенів вільності й зробити деякі припущення.

Конкретно для цієї схеми, наприклад, можна прийняти такі припущення:

– кузов вважається твердим тілом;

– допускається качка кузова;

– враховується момент сил сухого тертя при вилянні кузова;

– враховуються інерційні й пружно-в'язкі властивості колії;

– поздовжніми зазорами між надресорною балкою й боковиною візків нехтуємо.

Можна прийняти ще деякі припущення, які приводять до спрощення розрахункових схем та відповідно до зменшення кількості узагальнених координат, отже, до зменшення кількості диференціальних рівнянь руху.

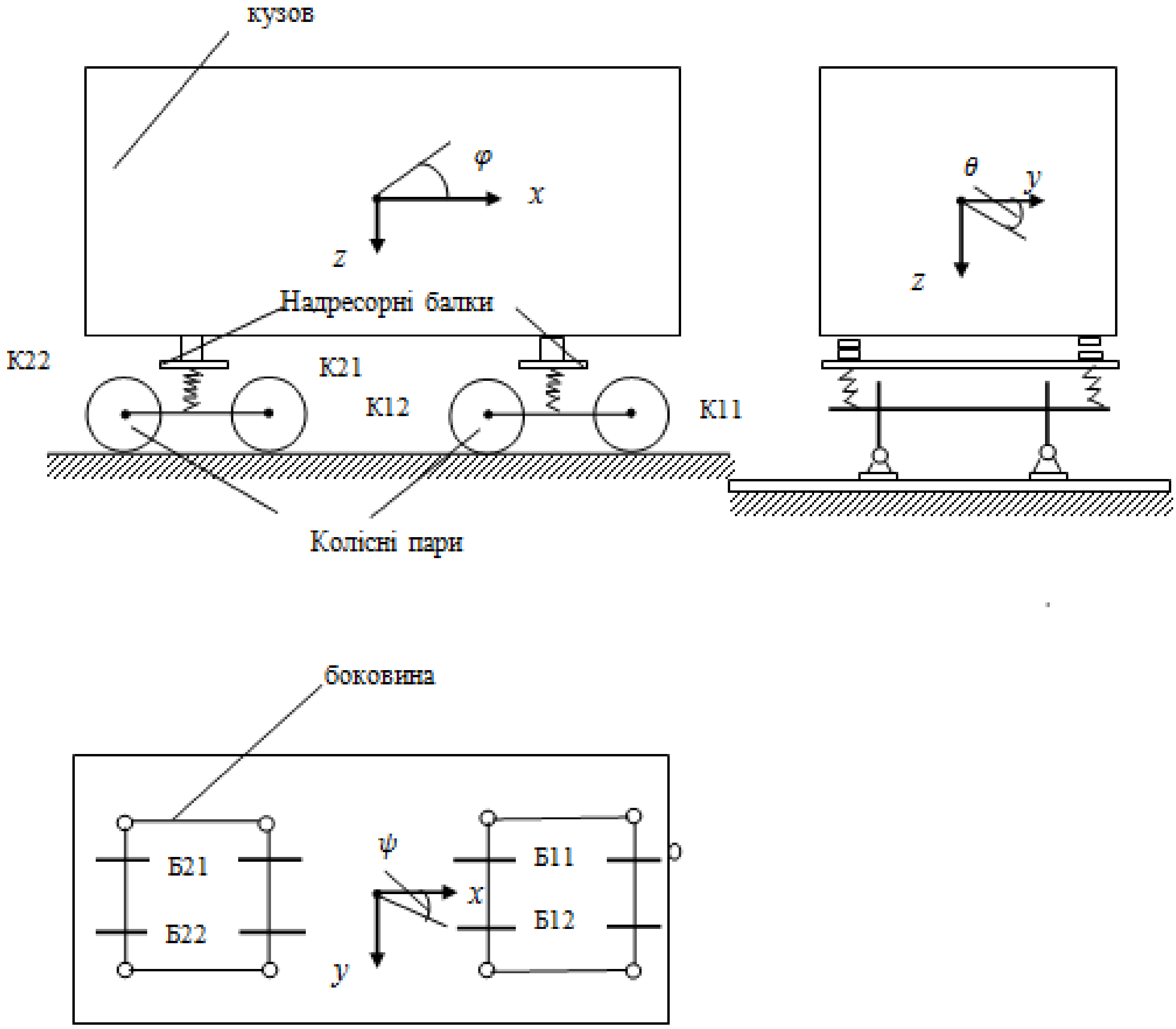

Рис. 4.4

Наприклад, враховуючи вказані припущення, виберемо загальні координати q_n, які пов'язані з переміщенням тіл системи:

$$x = q_1;\ \varphi = q_2;\ \theta = q_3;\ y = q_4;\ \psi = q_5;\ y_{Б1} = q_6;\ y_{Б2} = q_7;$$

$$\psi_1 = q_8;\ \psi_2 = q_9;\ \psi_{Б1} = q_{10};\ \psi_{Б2} = q_{11};\ \theta_1 = q_{12};$$

$$\theta_2 = q_{13};\ q_n = y_{pmij}\,(n = 14 \ldots 21);\ x = q_{22}.$$

Переміщення центру симетрії кузова в горизонтальній площині вздовж і поперек шляху відповідно позначимо через x, y, а у вертикальному напрямку через z; кути повороту кузова навколо його головних центральних осей інерції відповідно позначимо: θ – навколо повздовжньої осі; φ – навколо горизонтальної поперечної осі; ψ – навколо вертикальної осі.

Аналогічні переміщення надресорних балок позначимо індексом m ($m = 1, 2$ – номер візки), боковин *Бmj* ($j = 1$ – ліва; $j = 2$ – права сторони вагона), колісних пар *кmi* ($i = 1, 2$ номер колісної пари візка), рейок у точці прикладення навантаження *pmij* (переміщення рейкових ниток передбачається тільки в одному напрямку – вздовж осі y). Додатні напрямки для всіх переміщень та кути повороту вказані на рис. 4.4.

Прийняті координати використано для складання диференціальних рівнянь, які описують рух системи. Диференціальні рівняння руху системи отримаємо як рівняння Лагранжа другого роду.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_n}\right) = Q_n, \ \left(n = 1, 2, \ldots, 22\right),$$

де T – кінетична енергія системи;

Q_n – узагальнена сила відповідно узагальненої координаті q_n.

Розв’язання цих диференціальних рівнянь дозволяє визначити величини динамічних сил, що діють на вагон внаслідок виникнення коливальних процесів і ударної взаємодії між складовими вагона, а також між ходовими частинами й рейковою колією. Аналіз отриманих результатів дозволяють зробити оцінку динамічних якостей екіпажів.

Отже, можна зробити висновки, що для оцінки динамічних якостей механічних систем можна використати принципи аналітичної механіки у формі закону Ньютона, рівняння Д’Аламбера або рівняння Лагранжа другого роду. Застосування цих законів приводить до складання диференціальних рівнянь. А розв’язання системи рівнянь дозволяє визначити динамічні властивості механічних систем: безпеку руху, плавність ходу, габаритну безпеку, міцність, надійність та інші експлуатаційні якості.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ТА РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Айзенберг Т. Б. Руководство к решению задач по теоретической механике / Т. Б. Айзенберг, И. М. Воронков, В. М. Осецкий. – Москва : Высш. шк., 1968. – 432 с.
2. Бать М. И. Теоретическая механика в примерах и задачах : в 3 т. / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидджзе, А. С. Кельзон. – Москва : Наука, 1971–1973. – Т. 1. – 512 с.; Т. 2. – 624 с.; Т. 3. – 487 с.
3. Бухгольц Н. Н. Основной курс теоретической механики : в 2 ч. / Н. Н. Бухгольц. – Москва : Наука, 1967. – Ч. 1. – 468 с.; Ч. 2. – 332 с.
4. Длугач Л. А. Конспект лекций по аналитической механике для студентов транспортных вузов / Л. А. Длугач. – Днепропетровск : ДИИТ, 1977. – 58 с.
5. Лойцянский Л. Г. Курс теоретической механики : в 2 т. / Л. Г. Лойцянский, А. И Лурье. – Москва : Наука, 1984. – Т. 1. – 352 с.; Т. 2. – 640 с.
6. Павловський М. А. Теоретична механіка : підручник / М. А. Павловський. – Київ : Техніка, 2002. – 512 с.
7. Тарг С. М. Краткий курс теоретической механики / С. М. Тарг. – Москва : Наука, 1974. – 400 с.
8. Яблонский А. А. Курс теоретической механики : в 2 т. / А. А. Яблонский. – Москва : Высш. шк.,1977. – Т. 2. – 430 с.

Навчальне видання

Янгулова Ольга Леонідівна

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА
Аналітична механіка

Навчальний посібник

Редактор *О. О. Котова*
Комп'ютерна верстка *О. М. Гончаренко*

Формат 60×84 $^{1}\!/_{16}$. Ум. друк. арк. 4,41. Обл.-вид. арк. 4,45.
Тираж 50 пр. Зам. №

Дніпровський національний університет
залізничного транспорту імені академіка В. Лазаряна
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 1315 від 31.03.2003 р.

Адреса видавця та дільниці оперативної поліграфії:
вул. Лазаряна, 2, Дніпро, 49010