

В. Д. Данович, А. А. Малышева (ДИИТ)

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ СЦЕПА ПЯТИ ВАГОНОВ, ДВИЖУЩИХСЯ ПО ПРЯМОЛИНЕЙНОМУ УЧАСТКУ ПУТИ

Для объединения задач, решаемых в динамике поезда и в динамике вагона, используется метод «лупы», когда один из вагонов рассматривается по полной расчетной схеме, а соседние – по упрощенной. С этой целью разработана модель одиночного вагона, который может быть вставлен в любое место поезда.

Для решения многочисленных задач динамики рельсовых экипажей необходимо рассматривать различной степени сложности математические модели их колебаний и взаимодействия с железнодорожным путем. Достаточно полная расчетная схема четырехосного грузового вагона, движущегося по прямолинейному участку пути, предложена в [1]. Часто возникает необходимость принимать во внимание продольные силы, передающиеся на вагон со стороны соседних вагонов, а также их составляющие в вертикальном и горизонтальном поперечном направлениях. Эти силы можно получить из решения задачи динамики поезда и затем использовать их при изучении динамики одиночного вагона. Однако в ряде работ появляются математические модели, в которых задачи динамики поезда и динамики вагона соединяются вместе. В работе [2], к примеру, описывается математическая модель движения поезда, состоящего из отдельных вагонов, причем каждый представляет собой систему из трех твердых тел. Для решения ряда задач такая модель одиночного вагона может оказаться недостаточно полной.

В работе [3] предложена математическая модель, описывающая пространственные колебания сцепа вагонов в составе поезда, из которых один рельсовый экипаж рассматривается по наиболее полной расчетной схеме (названный «нулевым»), а расчетные схемы соседних вагонов, в зависимости от постановки задачи, упрощаются по мере удаления от «нулевого» экипажа в обе стороны. В работе [3] рассмотрен сцеп из трех вагонов, и для крайних вагонов, названных «первым» и «минус первым», дано описание упрощенной математической модели.

Плоские колебания сцепа, состоящего из трех или пяти вагонов, исследованы в [4], установлено, что в пяти вагонном сцепе погрешность определения сил взаимодействия между вагонами не превышает 10%. В данной работе рассматриваются пространственные колебания сцепа пяти вагонов для установления такой связи по всем видам колебаний. Крайние вагоны сцепа, которые по аналогии назовем «вторым» и «минус вторым»,

рассматриваются по еще более упрощенной схеме, чем «1»-й и «-1»-й вагоны в [3].

В качестве расчетной схемы «нулевого» экипажа принята механическая система с 58 степенями свободы [1]. Вагоны, соседние с «нулевым», представлены системой с 12 степенями свободы [3]. В расчетных схемах, описывающих колебания этих вагонов, сохранены основные особенности тележек грузовых вагонов – забегание боковых рам.

Приведем математическую модель пространственных колебаний сцепы пяти вагонов, движущихся по прямолинейному участку пути, имеющему вертикальные и горизонтальные неровности.

Введем следующие обозначения: x, y, z – перемещения центра масс кузова вдоль соответствующих осей; θ, ψ, φ – углы поворота кузова относительно главных центральных осей инерции; аналогичные перемещения надрессорных балок имеют индекс i ($i=1, 2$ – номер тележки), боковин – индекс b_{ij} ($j=1$ – левая, $j=2$ – правая сторона вагона), колесных пар – индекс km ($m=1, 2$ – номер колесной пары в тележке), рельсов в точке контакта с колесами – $rimj$ (предполагается, что перемещения рельсовых нитей имеют место только под «нулевым» вагоном в двух направлениях – вдоль осей y и z), колес – индекс imj . Перемещения «нулевого» вагона снабжены верхним индексом «0», а соседних вагонов – верхними индексами «1», «-1», «2» и «-2» (верхние индексы «1» и «2» относятся к вагонам, находящимся впереди «нулевого» по ходу движения). Относительные перемещения соседних вагонов показаны верхними индексами, соответствующими номерам вагонов. Например, верхними индексами «10» и «-1-2» обозначаются относительные перемещения «первого» и «нулевого», а также «минус первого» и «минус второго» вагонов.

На рис.1 приведена расчетная схема сцепы из пяти вагонов для определения сил, действующих между вагонами, а расчетная схема вагона с 12-тью степенями свободы аналогична [3].

При исследовании пространственных колебаний вагонов, соседних с «нулевым», рассматриваемых по упрощенной расчетной схеме, введены следующие допущения. Предполагается, что вагоны имеют одноступенчатое рессорное подвешивание. Каждый из них состоит из одиннадцати твердых тел: кузова, двух надрессорных балок, четырех боковых рам тележки и четырех колесных пар. В отличие от «нулевого» вагона, путь под соседними с ним вагонами считается абсолютно жестким в вертикальном направлении и упругим в горизонтальном поперечном направлении. Это предположение не приводит к увеличению числа степеней свободы, так как скоростью отжатий рельсов в выражениях для поперечных сил можно пренебречь.

Уравнения связей между телами системы для «1»-го и «-1»-го вагонов приведены в работе [3].

В качестве обобщенных координат для этих вагонов приняты следующие величины:

$$q_1^n = z^n, q_2^n = \varphi^n, q_3^n = \theta^n, q_4^n = y^n, q_5^n = \psi^n, q_k^n = \psi_i^n (k = 6, 7)$$

$$q_k^n = \psi_{\bar{0}i}^n (k = 8, 9), q_k^n = y_{\bar{0}i}^n (k = 10, 11), q_{12}^n = x^n, \quad (1)$$

где $i=1, 2$; $n=1$ и -1 – соответственно для «первого» и «минус первого» вагонов.

Во «2»-ом и «-2»-ом вагонах будем принимать во внимание только колебания кузовов, то есть эти вагоны представляют собой системы с шестью степенями свободы:

$$q_1^n = z^n, q_2^n = \varphi^n, q_3^n = y^n, q_4^n = \theta^n, q_5^n = \psi^n, q_6^n = x^n, \quad (2)$$

где $n=2$ и -2 – соответственно для «второго» и «минус второго» вагонов.

Запишем сжатия ($\Delta_{\text{цз}ij}^n$) и горизонтальные поперечные ($\Delta_{\text{цу}ij}^n$) взаимные перемещения кузова и тележек для определения сил, действующих в рессорных комплектах этих вагонов:

$$\Delta_{\text{цу}ij}^n = y^n - (-1)^i \cdot \ell \cdot \varphi^n - h \cdot \theta^n - y_{\bar{0}ij}^n, \quad (n = 2, -2),$$

$$\Delta_{\text{цз}ij}^n = z^n + (-1)^i \cdot \ell \cdot \varphi^n + (-1)^j \cdot b \cdot \theta^n - z_{\bar{0}ij}^n, \quad (n = 2, -2), \quad (3)$$

где 2ℓ – база вагона; h – высота центра масс кузова над плоскостью опирания надрессорной балки на упругие элементы; $y_{\bar{0}ij}^n, z_{\bar{0}ij}^n$ – горизонтальные поперечные и вертикальные перемещения боковых рам тележек под рессорными комплектами, определяемые горизонтальными поперечными перемещениями колесных пар и вертикальными перемещениями колес:

$$y_{\bar{0}i1}^n = y_{\bar{0}i2}^n = \frac{y_{ki1}^n + y_{ki2}^n}{2}, z_{\bar{0}ij}^n = \frac{z_{i1j}^n + z_{i2j}^n}{2}, \quad (n = 2, -2).$$

Наконец, горизонтальные поперечные перемещения колесных пар определяются полусуммой горизонтальных неровностей пути $\eta_{\text{гim}j}$:

$$y_{\text{kim}}^n = \frac{\eta_{\text{гim}1}^n + \eta_{\text{гim}2}^n}{2},$$

а вертикальные перемещения колес равны вертикальным неровностям пути:

$$z_{\text{im}j}^n = \eta_{\text{вim}j}^n.$$

На кузова «второго» и «минус второго» вагонов действуют силы, соответствующие относительным перемещениям (3):

$$S_{\text{цсij}}^n = k_{\text{цс}} \cdot \Delta_{\text{цсij}}^n + \beta_{\text{цс}} \cdot \dot{\Delta}_{\text{цсij}}^n + F_{\text{цс}} \cdot \text{sign} \dot{\Delta}_{\text{цсij}}^n, \quad (4)$$

где $k_{\text{цс}}$ ($s = y, z$) – жесткости рессорного комплекта центрального подвешивания тележки при изгибе ($k_{\text{цy}}$) и сжатии ($k_{\text{цz}}$); $\beta_{\text{цс}}$ – коэффициенты вязкого трения соответствующих демпферов (если имеют место демпферы вязкого трения); $F_{\text{цс}}$ – амплитудные значения сил сухого трения соответствующих демпферов.

Составляем дифференциальные уравнения колебаний n -го вагона, пользуясь принципом Даламбера:

$$\begin{aligned} m \cdot \ddot{z}^n + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 S_{\text{цzij}}^n &= 0, \\ I_y \cdot \ddot{\phi}^n + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 (-1)^i \ell \cdot S_{\text{цzij}}^n &= 0, \\ I_x \cdot \ddot{\theta}^n - \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 h \cdot S_{\text{цyij}}^n + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 (-1)^i b \cdot S_{\text{цzij}}^n &= 0, \\ m \cdot \ddot{y}^n + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 S_{\text{цyij}}^n &= 0, \\ I_z \cdot \ddot{\psi}^n - \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 (-1)^i \ell \cdot S_{\text{цyij}}^n &= 0, \\ m \cdot \ddot{x}^n &= 0, \quad (n = 2, -2), \end{aligned} \quad (5)$$

В этих уравнениях $2b$ – расстояние между рессорными комплектами в горизонтальном поперечном направлении; m – масса кузова; I_x, I_y, I_z – моменты инерции кузова относительно главных центральных осей кузова «второго» и «минус второго» вагонов.

Таким образом, получены уравнения (5), описывающие колебания «второго» и «минус второго» вагонов; аналогичные уравнения для «нулевого» вагона приведены в [1], а для «первого» и «минус первого» – в [3]. Теперь необходимо связать между собой все эти вагоны.

Для этого рассмотрим связи между вагонами. Предполагаем, что имеют место относительные перемещения соседних вагонов в продольном (Δ_x), горизонтальном поперечном (Δ_y), вертикальном (Δ_z) и угловом (относительно продольной оси – Δ_θ) направлениях. Относительные перемещения между «нулевым» и «первым» и «минус первым» вагонами приведены в [3].

На рис. 2 изображен «первый» вагон и приложенные к нему силы со стороны «второго», находящегося спереди по ходу движения поезда, и «нулевого» – находящегося сзади.

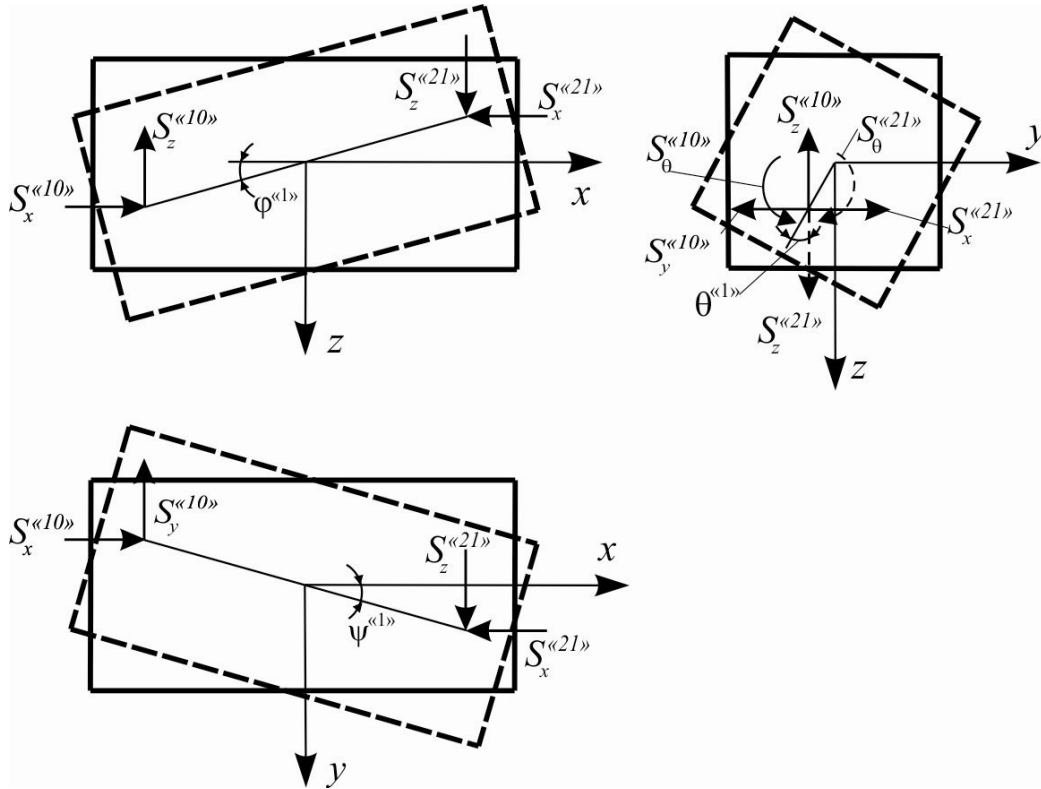


Рис. 2. «Первый» вагон и приложенные к нему силы со стороны вагонов, находящихся спереди и сзади по ходу движения поезда

Приведем выражение для относительных перемещений между «вторым» и «первым» вагонами:

$$\Delta_x^{''21''} = x^{''1''} + h_a \cdot \varphi^{''1''} - x^{''2''} - h_a \cdot \varphi^{''2''},$$

$$\Delta_y^{''21''} = y^{''2''} - (L - \ell_0) \cdot \psi^{''2''} - h_a \cdot \theta^{''2''} - y^{''1''} - (L - \ell_0) \cdot \psi^{''1''} + h_a \cdot \theta^{''1''},$$

$$\Delta_z^{''21''} = z^{''2''} + (L - \ell_0) \cdot \varphi^{''2''} - z^{''1''} + (L - \ell_0) \cdot \varphi^{''1''},$$

$$\Delta_\theta^{''21''} = \theta^{''2''} - \theta^{''1''},$$

а также между «минус первым» и «минус вторым» вагонами:

$$\Delta_x^{''-1-2''} = x^{''-2''} + h_a \cdot \varphi^{''-2''} - x^{''-1''} - h_a \cdot \varphi^{''-1''},$$

$$\Delta_y^{''-1-2''} = y^{''-1''} - (L - \ell_0) \cdot \psi^{''-1''} - h_a \cdot \theta^{''-1''} - y^{''-2''} - (L - \ell_0) \cdot \psi^{''-2''} + h_a \cdot \theta^{''-2''},$$

$$\Delta_z^{''-1-2''} = z^{''-1''} + (L - \ell_0) \cdot \varphi^{''-1''} - z^{''-2''} + (L - \ell_0) \cdot \varphi^{''-2''},$$

$$\Delta_\theta^{''-1-2''} = \theta^{''-1''} - \theta^{''-2''},$$

где $2L$ – расстояние между осями автосцепок одного вагона в продольном направлении; h_a – расстояние по вертикали между продольной осью автосцепки и центром масс кузова; ℓ_o – расстояние от центра клина автосцепки до опорной поверхности розетки.

По относительным перемещениям Δ_s ($s = x, y, z, \theta$) определим силы, действующие между вагонами (рис. 2). Продольные силы S_x определяются так, как описано в работе [5], и зависят от типа поглощающего аппарата. Горизонтальные поперечные (S_y), вертикальные (S_z) силы и моменты (S_θ), действующие между вагонами, определяются по зависимостям, приведенным в [3, 6].

На «второй» и «минус второй» вагоны со стороны отброшенной части состава действуют только продольные силы $S_x^{''2''}$ и $S_x^{''-2''}$. Силы, возникающие между вагонами, показаны на рис. 1 и 2.

На рис. 2 для «первого» вагона показаны начальное (сплошная линия) и произвольное (пунктирная линия) положения. Из рис. 1 и 2 определим добавки к обобщенным силам (Q_s^n ; $s = x, y, z, \theta, \varphi, \psi$; $n = 2, -2, 0, -1, 1$), входящим в правые части дифференциальных уравнений, описывающих колебания кузовов рассматриваемых вагонов:

Обобщенные силы, входящие в уравнения «второго» вагона:

$$Q_x^{''2''} = S_x^{''21''} - S_x^{''2''}; \quad Q_y^{''2''} = -S_y^{''21''}; \quad Q_z^{''2''} = -S_z^{''21''};$$

$$Q_\theta^{''2''} = h_a \cdot [S_y^{''21''} + \theta^{''2''} \cdot S_z^{''21''}] - S_\theta^{''21''};$$

$$Q_\varphi^{''2''} = -h_a \cdot (S_x^{''2''} - S_x^{''21''}) - (L - \ell_o) [S_z^{''21''} - \varphi^{''2''} \cdot (S_x^{''2''} + S_x^{''21''})];$$

$$Q_\psi^{''2''} = (L - \ell_o) [S_y^{''21''} + \psi^{''2''} \cdot (S_x^{''2''} + S_x^{''21''})].$$

Обобщенные силы, входящие в уравнения «первого» вагона:

$$Q_x^{''1''} = S_x^{''10''} - S_x^{''21''}; \quad Q_y^{''1''} = S_y^{''21''} - S_y^{''10''}; \quad Q_z^{''1''} = S_z^{''21''} - S_z^{''10''};$$

$$Q_\theta^{''1''} = -h_a \cdot [S_y^{''21''} - S_y^{''10''} + \theta^{''1''} \cdot (S_z^{''21''} - S_z^{''10''})] + S_\theta^{''21''} - S_\theta^{''10''};$$

$$Q_\varphi^{''1''} = -h_a \cdot (S_x^{''21''} - S_x^{''10''}) - (L - \ell_o) [S_z^{''21''} + S_z^{''10''} + \varphi^{''1''} \cdot (S_x^{''21''} + S_x^{''10''})];$$

$$Q_\psi^{''1''} = (L - \ell_o) [S_y^{''21''} + S_y^{''10''} + \psi^{''1''} \cdot (S_x^{''21''} + S_x^{''10''})].$$

Обобщенные силы, входящие в уравнения «нулевого» вагона:

$$Q_x^{''0''} = S_x^{''0-1''} - S_x^{''10''}; \quad Q_y^{''0''} = S_y^{''10''} - S_y^{''0-1''}; \quad Q_z^{''0''} = S_z^{''10''} - S_z^{''0-1''};$$

$$Q_\theta^{''0''} = -h_a \cdot \left[S_y^{''10''} - S_y^{''0-1''} + \theta^{''0''} \cdot (S_z^{''10''} - S_z^{''0-1''}) \right] + S_\theta^{''10''} - S_\theta^{''0-1''};$$

$$Q_\varphi^{''0''} = -h_a \cdot (S_x^{''10''} - S_x^{''0-1''}) - (L - \ell_o) \left[S_z^{''10''} + S_z^{''0-1''} - \varphi^{''0''} \cdot (S_x^{''10''} + S_x^{''0-1''}) \right];$$

$$Q_\psi^{''0''} = (L - \ell_o) \left[S_y^{''10''} + S_y^{''0-1''} + \psi^{''0''} \cdot (S_x^{''10''} + S_x^{''0-1''}) \right].$$

Обобщенные силы, входящие в уравнения «минус первого» вагона:

$$Q_x^{''-1''} = S_x^{''-1-2''} - S_x^{''0-1''}; \quad Q_y^{''-1''} = S_y^{''0-1''} - S_y^{''-1-2''}; \quad Q_z^{''-1''} = S_z^{''0-1''} - S_z^{''-1-2''};$$

$$Q_\theta^{''-1''} = -h_a \cdot \left[S_y^{''0-1''} - S_y^{''-1-2''} + \theta^{''-1''} \cdot (S_z^{''0-1''} - S_z^{''-1-2''}) \right] + S_\theta^{''0-1''} - S_\theta^{''-1-2''};$$

$$Q_\varphi^{''-1''} = -h_a \cdot (S_x^{''0-1''} - S_x^{''-1-2''}) - (L - \ell_o) \left[S_z^{''0-1''} + S_z^{''-1-2''} - \varphi^{''-1''} \cdot (S_x^{''0-1''} + S_x^{''-1-2''}) \right];$$

$$Q_\psi^{''-1''} = (L - \ell_o) \left[S_y^{''0-1''} + S_y^{''-1-2''} + \psi^{''-1''} \cdot (S_x^{''0-1''} + S_x^{''-1-2''}) \right].$$

Обобщенные силы, входящие в уравнения «минус второго» вагона:

$$Q_x^{''-2''} = S_x^{''-2''} - S_x^{''-1-2''}; \quad Q_y^{''-2''} = -S_y^{''-1-2''}; \quad Q_z^{''-2''} = -S_z^{''-1-2''};$$

$$Q_\theta^{''-2''} = h_a \cdot \left[S_y^{''-1-2''} + \theta^{''-2''} \cdot S_z^{''-1-2''} \right] - S_\theta^{''-1-2''};$$

$$Q_\varphi^{''-2''} = -h_a \cdot (S_x^{''-1-2''} - S_x^{''-2''}) - (L - \ell_o) \left[S_z^{''-1-2''} - \varphi^{''-2''} \cdot (S_x^{''-1-2''} + S_x^{''-2''}) \right];$$

$$Q_\psi^{''-2''} = (L - \ell_o) \left[S_y^{''-1-2''} + \psi^{''-2''} \cdot (S_x^{''-1-2''} + S_x^{''-2''}) \right].$$

Таким образом, составлены дифференциальные уравнения пространственных колебаний сцепа из пяти вагонов в составе поезда.

Список литературы:

1. Блохин, Е. П. Математическая модель пространственных колебаний четырехосного рельсового экипажа / Е. П. Блохин, В. Д. Данович, Н. И. Морозов – Днепропетровский институт инженеров железнодорожного

- транспорта. – Днепропетровск, 1986. –39с. – Рус. – Деп. в ЦНИИТЭИ МПС 29.09.86, № 7252 ж.д.
2. Блохин, Е. П. О построении математической модели движения поезда по пути произвольного очертания / Е. П. Блохин, Н. М. Хачапуридзе, В. А. Поляков // Проблемы динамики и прочности железнодорожного подвижного состава : Межвуз. сб. научн. тр. – Днепропетровск, 1981. – С. 3–14.
 3. Блохин, Е. П. Математическая модель пространственных колебаний сцепа вагонов в составе поезда, движущегося по прямолинейному участку пути / Е. П. Блохин, В. Д. Данович, Н. И. Морозов // Динамика, прочность и надежность железнодорожного подвижного состава : Межвуз. сб. научн. тр. – Днепропетровск, 1987. – С. 4–19.
 4. Блохин, Е. П. Математическое моделирование обезгруживания тележек грузовых вагонов / Е. П. Блохин, Л. А. Манашкин, Н. О. Грановская // Вестник ВНИИЖТ. – 1989. – № 5. – С. 26–28.
 5. Расчеты и испытания тяжеловесных поездов / Е. П. Блохин, Л. А. Манашкин, Е. Л. Стамблер, Л. Г. Маслеева, В. М. Михайличенко, Н. И. Грановская. – Москва : Транспорт, 1986. – 263 с.
 6. Хачапуридзе, Н. М. Математическое моделирование колебаний вагонов поезда в продольной вертикальной плоскости (включая изгибные) при переходных режимах движения поезда / Н. М. Хачапуридзе, П. Г. Хорошманенко // Динамика, нагруженность и надежность подвижного состава : Межвуз. сб. науч. тр. – Днепропетровск, 1985. – С. 17–29.